高等学校试用教材

微 分 几 何

梅向明 黄敬之 编

高等教育出版社

本书是根据高等师范院校微分几何教学大纲（供数学专业用）编写的。全书共有三章：第一章曲线论和第二章曲面论为经典微分几何的主要内容；第三章介绍外微分形式和活动标架以及外微分形式和活动标架法在三维欧氏空间曲面论上的应用。

本书由数学、力学、天文学教材编审委员会委托朱鼎勋教授初审、白正国教授复审。可作为高等师范院校数学系《微分几何》课程的试用教材。

高等学校试用教材

微分几何

梅向明　黄敬之　编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
沈阳新华印刷厂印装

开本850×1168 1/32　印张8.75　字数210,000
1981年7月第1版　1987年3月第7次印刷
印数：73,781—83,800
书号 13010·0626　定价 1.55 元

前言

这本教材是我们多年来讲授《微分几何》课所用的讲义，根据高等师范院校《微分几何》教学大纲的要求，整理修改而成．其中第一、二章曾在六六年前反复讲授多遍，第三章只在近年来才讲过．

微分几何是一门历史悠久的学科，可以这样说，微积分诞生时就同时诞生了微分几何，不过这门学科的生命力至今还很旺盛．近年来它对数学中其它分支的影响越来越深刻，对于自然科学中其他学科的影响的范围也越来越扩大．与此同时，这门学科本身从内容上到方法上也在不断更新．作为一本教科书应该尽可能地反映这样一种发展趋势．但是由于高等师范院校数学专业教学计划中所给予微分几何这门课的课时的限制，不可能完全满足这样的要求．我们的想法是，从内容上来说还是讲授微分几何中最基础的部分——三维欧氏空间中的曲线和曲面的局部理论，可是从方法上来说则加以更新．这样做将使学生能够从较浅显的内容去学习近代的处理方法，对新方法接受起来阻力比较小一些；另一方面，对于微分几何有兴趣的学生，在掌握了新方法以后，就可以通过选修课或讨论班进一步运用这些方法去学习微分几何的近代内容．

在这本教材里作为新的方法来说，我们的目的是介绍法国数学家嘉当 (E. Cartan) 的活动标架法，同时介绍相应的数学工具——外微分形式．不过为了使学生容易接受，开始时我们还是用向量分析的方法讲授三维欧氏空间的曲线和曲面的局部理论．到了曲面论的基本定理和曲面上的内蕴几何部分，由于用向量符

号表达起来不方便，我们采用了张量符号，使学生稍稍接触一些张量分析的方法．最后，我们在第三章里用嘉当的活动标架法把曲线论和曲面论又复习一遍，使学生既学习了新方法，同时又加深对已学过的知识的理解．

杭州大学的白正国教授和北京师范大学的朱鼎勋教授在审查这本教材时提出了不少宝贵的意见，我们谨在此表示衷心的感谢．同时希望使用这本教材的兄弟院校的同志对教材中的错误缺点和不足之处给予批评指正。

梅向明　黄敬之

1981 年 4 月于北京师范学院数学系

目　　录

第一章 曲 线 论

§1* 向量代数复习

我们在这里对向量的概念及其代数运算作简单扼要的复习.

我们经常遇到的量有两种，一种是数量(或称标量)，另一种量是既有大小又有方向的量称为**向量**(或称**矢量**).

在几何中的有向线段就是一个直观的向量（如图1-1），用带有箭头的记号 $\overrightarrow{OA}$ 或用 $\boldsymbol{a}$ 表示这个向量，我们常用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$ 表示这个向量.

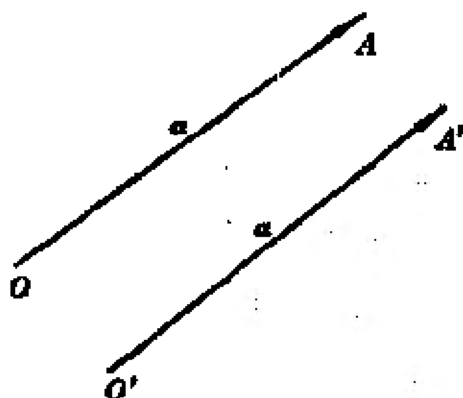


图 1-1

把相等的向量看作是在不同地点的同一向量，这种具有大小和方向而无特定位置的向量称为**自由向量**．自由向量的始点可以是空间内的任何一点．由此，一个向量的图形可以自由平移，今后如有必要就可以把几个向量移到同一出发点.

表示向量的大小（或长度）的数值称为向量的**模**(或**绝对值**)，用记号 $|\overrightarrow{OA}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$ 表示．模等于1的向量称为**单位向量**(或称么矢)．模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$．模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**逆向量**(或称**负向量**)，记作 $-\boldsymbol{a}$.

对于空间内任意一点 P，以直角坐标系的原点 O 为始点，以 P 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的**向径**(或**矢径**)，记作 $\boldsymbol{r}$(图1-2)．空间的点和它的向径是一一对应的，因此今后我们经常用向径 $\boldsymbol{r}$ 代表 P 点，并且习惯上把 P 点说成 $\boldsymbol{r}$ 点，这样可以把有关空间的点的

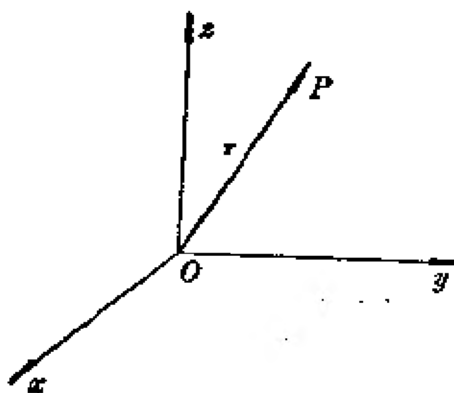


图 1-2

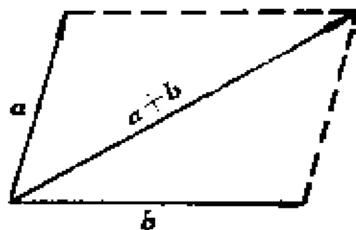


图 1-3

讨论转换为有关向量的讨论.

下面复习有关向量的一些运算.

向量的和与差 对于两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和, 有平行四边形法则: 把 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的始点放在同一点, 以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两边作平行四边形, 那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的公共始点为起点, 而以它在平行四边形中的相对的顶点为终点的向量 (图 1-3). 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 定义为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

向量与数量的乘积(向量的数乘) 向量 $\boldsymbol{a}$ 和数量 λ, 规定它们的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍为一个向量, 它的模是 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$, 如果 $\lambda>0$, 那么 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向和 $\boldsymbol{a}$ 相同; 如果 $\lambda<0$, 那么 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向和 $\boldsymbol{a}$ 相反; 如果 $\lambda=0$, 那么 $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. 直观上可以看出, 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\lambda\boldsymbol{a}$ 互相平行. 反过来, 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行, 则必存在实数 $\lambda\neq0$, 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

当然, 对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和数量 λ 的乘积, 把 λ 写在 $\boldsymbol{a}$ 的右侧也是一样的: $\boldsymbol{a}\lambda=\lambda\boldsymbol{a}$.

如果 μ 是另一个数量, 那么

$$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$$

任何一个向量都可以写成它的模和单位向量的乘积. 例如, 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量是 $\boldsymbol{a}_0$, 我们就可以写为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$$

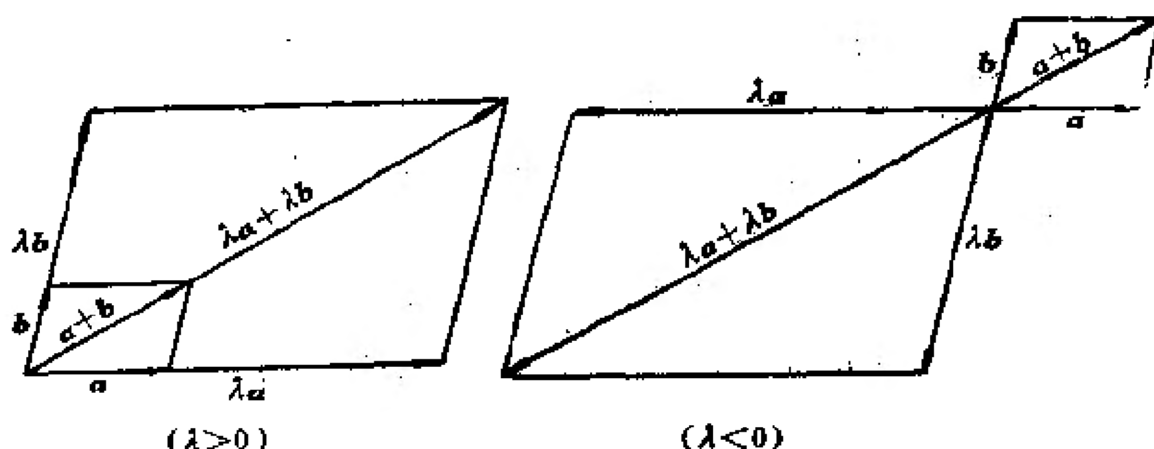
当 $|\boldsymbol{a}|\neq0$ 时,

$$a_0=\frac{1}{|a|}a$$

由向量加法的平行四边形法则(见图 1-4)，立刻得到

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$$

这就是说，向量的数乘满足分配律.



($\lambda>0$)　　　　($\lambda<0$)

图 1-4

向量的分量　在空间的笛卡儿直角坐标系的三个坐标轴上，分别取三个向量 e_1、e_2、e_3，它们满足以下条件: (1) e_1 在 Ox 轴上，e_2 在 Oy 轴上，e_3 在 Oz 轴上；(2) e_1、e_2、e_3 中每一个向量的方向与它们所在轴的正向相同；(3) e_1、e_2、e_3 都是单位向量. 我们把向量 e_1、e_2、e_3 中的每一个称为坐标系的基向量，简称为坐标系的基(图 1-5).

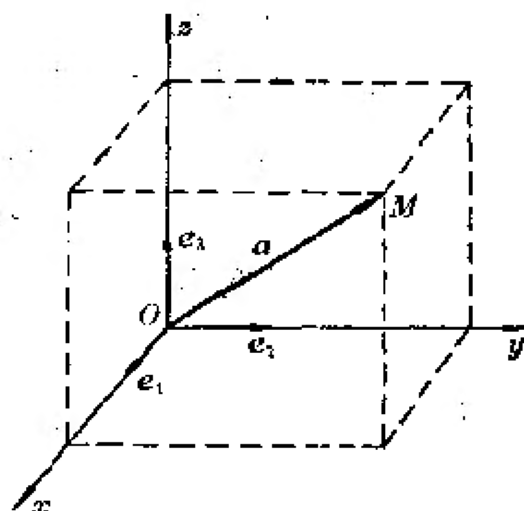


图 1-5

空间中任何一个向量 a，可以把它的始点移到坐标原点 O，则 a 可以唯一地分解为三个平行于 e_1、e_2、e_3 的向量. 即

$$a=xe_1+ye_2+ze_3$$

数组 (x, y, z) 称为向量 a 的分量或坐标. 记为

$$a=(x, y, z)$$

由向量的分量的定义可以看出，对于一个向量，不论把它的始点放在何处，它在坐标轴上的分量是不变的.

利用向量的分量，可以得到向量加减法及向量数乘的分量表示.

若 $a=x_1e_1+y_1e_2+z_1e_3$, $b=x_2e_1+y_2e_2+z_2e_3$ 为两个向量，

则有 $a\pm b=(x_1\pm x_2)e_1+(y_1\pm y_2)e_2+(z_1\pm z_2)e_3$

若 λ 是一数量，而向量 $a=xe_1+ye_2+ze_3$，则有

$$\lambda a=(\lambda x)e_1+(\lambda y)e_2+(\lambda z)e_3$$

向量的数量积(点乘)和它的性质 给出两个向量 a 和 b，设它们的夹角为 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，定义它们的数量积如下：

$$a\cdot b=|a||b|\cos\varphi$$

根据定义可以直接推出：

1° 向量的数量积满足下列规则：

$a\cdot b=b\cdot a$ (交换律)

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (分配律)

$m(a\cdot b)=ma\cdot b$ (与数乘的结合律)

2° $a\perp b$ 的充分必要条件是它们的数量积 $a\cdot b=0$.

3° 若 $\varphi=0$，则 $\cos\varphi=1$. 所以

$$a^2=a\cdot a=|a|^2$$

因此向量 a 的长度为

$$|a|=\sqrt{a\cdot a}$$

进一步我们得到以下结论：若 a 是单位向量，则有 $a\cdot a=1$，反之也成立.

4° 笛卡儿直角坐标系的三个基向量 e_1、e_2、e_3满足以下关系

$$e_i\cdot e_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\qquad (i, j=1, 2, 3)$$

5° 设向量$\boldsymbol{a}$的分量为(x, y, z)，利用上式得到

$$x=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1,\quad y=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2,\quad z=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3$$

若$\boldsymbol{a}$是单位向量，它和$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$的夹角分别为α、β、γ，则有

$$\boldsymbol{a}=\cos\alpha\boldsymbol{e}_1+\cos\beta\boldsymbol{e}_2+\cos\gamma\boldsymbol{e}_3$$

即

$$\boldsymbol{a}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$$

6° 设两向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的分量分别为(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2)，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

特别地

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=x_1^2+y_1^2+z_1^2$$

设两个单位向量$\boldsymbol{a}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$和$\boldsymbol{b}(\cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma')$的夹角为$\varphi$，则有

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$$

7° 对于任意两个向量$\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$，设它们的夹角为$\varphi$，则有

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

例 1 求过$\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$点，并且垂直于方向$\boldsymbol{n}(a, b, c)$的平面方程.

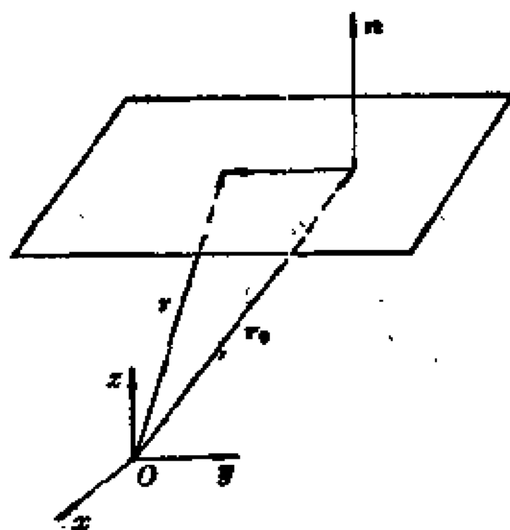


图 1-6

解 设平面上任一点是$\boldsymbol{r}(x, y, z)$（图 1-6），则向量$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$与$\boldsymbol{n}$垂直，因而它们的数量积等于零.

所求平面方程是

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$$

用坐标表示这个平面方程得到

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

或

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

记 $ax_0+by_0+cz_0=-d$，就得到平面的一般方程

$$ax+by+cz+d=0$$

反过来，任给一平面 $ax+by+cz+d=0$，它必垂直于向量 $\boldsymbol{n}(a, b, c)$，我们把 $\boldsymbol{n}(a, b, c)$ 称为此平面的法向量。

向量的向量积(叉乘)和它的性质　给出两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，设它们的夹角为 φ，定义它们的向量积(叉乘)如下：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，而且

1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$；

2) 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系；

3) 向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$，即以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边所构成的平行四边形的面积.

根据上述定义，可以直接推出：

1° 向量积的运算满足下列规则：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) \qquad \text{(反交换律)}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \qquad \text{(分配律)}$$

$$m\boldsymbol{a}\times n\boldsymbol{b}=mn(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \qquad \text{(与数乘的结合律)}$$

2° $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

3° 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是它们的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

4° 对于三个基向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 有

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0} \qquad (i=1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\pm\boldsymbol{e}_k$$

其中 (i, j, k) 是 $(1, 2, 3)$ 的一排列，偶排列时取正号，奇排列时取负号.

5° 向量的向量积可以用坐标表示．设$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的分量分别为(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2)，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

其中$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$是笛卡儿直角坐标系的三个基向量．

例 2 给出两个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

求过$\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$点，且平行于所给两个平面交线的直线方程．

解 所求直线的方向向量$\boldsymbol{l}$分别垂直于已知平面的法向量$\boldsymbol{n}_1(a_1, b_1, c_1)$和$\boldsymbol{n}_2(a_2, b_2, c_2)$，因此$\boldsymbol{l}\parallel\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$

设所求直线上任一点是$\boldsymbol{r}(x, y, z)$，则有

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t\boldsymbol{l}$$

其中t是参数．因此所求直线方程为

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)$$

即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)$$

用坐标表示这个平面方程就是：

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

向量的混合积 给出三个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$，定义它们的**混合积**如下：

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

混合积$(\boldsymbol{a}、\boldsymbol{b}、\boldsymbol{c})$的几何意义是它的绝对值$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$表示以向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积．

可以证明三个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面（即平行于同一平面）的充分

必要条件是

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=0$$

向量的混合积也可以用坐标表示.设三个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), 则混合积的坐标表示为:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

由行列式的性质可以得到:

推论 1 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$

$$=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

推论 2 $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

二重向量积 给出三个向量 $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\boldsymbol{c}(x_3, y_3, z_3)$, 则有以下关系:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \qquad (1.1)$$

证明 根据向量积的坐标表示

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{e}_1+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{e}_2+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{e}_3$$

因而有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ y_1z_2-y_2z_1 & z_1x_2-x_1z_2 & x_1y_2-y_1x_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$=(z_1x_2z_3+y_1x_2y_3-x_1z_2z_3-x_1y_2y_3)\boldsymbol{e}_1$$
$$+(x_1y_2x_3+y_2z_1z_3-y_1x_2x_3-y_1z_2z_3)\boldsymbol{e}_2$$
$$+(y_1z_2y_3+x_1z_2x_3-y_2z_1y_3-z_1x_2x_3)\boldsymbol{e}_3$$

因而得到

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

例 3 证明拉格朗日(Lagrange)恒等式:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}\\&=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{d}\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

例 4 证明三重向量积有以下关系:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$$

证明 设 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 根据向量积的运算法则及二重向量积得到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{m}\\&=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{d}\\&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}\end{aligned}$$

习 题

1 证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=a^2b^2$

2 证明 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$

3 证明 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=0$

4 证明 $((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}))=2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

5 证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})$

6 如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 证明:

$$\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}=a^4\boldsymbol{b}$$

7 求三平面 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=\alpha$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=\beta$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}=\gamma$ 平行于同一直线的条件.

§2 向量函数

在以后的学习中，要广泛地应用向量分析的知识，因此在这里对向量分析的基本内容作简单扼要的介绍.

首先介绍向量函数的概念.

给出一点集 G，如果对于 G 中每一个点 x，有一个确定的向量 $\boldsymbol{r}$ 和它对应，则我们说，在 G 上给定了一个向量函数，记作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x),\quad x\in G$$

例如，设 G 是实数轴上一区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$，则得一元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

设 G 是一平面域，$(u, v)\in G$，则得二元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$$

设 G 是空间中一区域，$(x, y, z)\in G$，则得三元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x, y, z)$$

正如数学分析中对实函数所讨论的那样，我们也对向量函数引进极限、连续、微商和积分等概念.

2.1 向量函数的极限

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是所给的一元向量函数，$\boldsymbol{a}$ 是常向量(即长度与方向都固定的向量)，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta>0$，使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$$

成立，则我们说，当 $t\to t_0$ 时，向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 趋于极限 $\boldsymbol{a}$. 记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}$$

关于数量函数的极限性质，都可以推广到向量函数的情况，从而得到类似的命题.

命题 1 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{s}(t)$ 是两个一元向量函数，$\lambda(t)$ 是一个实函数，并且当 $t\to t_0$ 时这些函数的值趋向极限

$$\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{b},\quad \lambda(t)\to m$$

即 $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$, $|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|\to 0$, $|\lambda(t)-m|\to 0$, 则有

(1) 两个向量函数之和(差)的极限等于极限之和(差):

$$\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$$

(2) 乘积 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$(数量乘向量)的极限等于极限的乘积:

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)\longrightarrow m\boldsymbol{a}$$

(3) 数量积 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$的极限等于极限的数量积:

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

(4) 向量积 $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)$的极限等于极限的向量积:

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

证明 这些命题的证明原则上和数学分析中关于实函数所对应的命题的证明没有什么区别.

(1) $|(\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t))-(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})|$

$=|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\pm(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})|$

$\leqslant|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|$

当 $t\to t_0$ 时, 由已知条件$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$, $|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|\to 0$, 所以有

$$|(\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t))-(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})|\longrightarrow 0$$

即
$$\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$$

(2) 作出向量的差

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}=\lambda(t)(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})+(\lambda(t)-m)\boldsymbol{a}$$

由此得出

$$|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}|\leqslant|\lambda(t)||\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|+|\lambda(t)-m||\boldsymbol{a}|$$

当 $t\to t_0$ 时, 由已知条件$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$, $|\lambda(t)-m|\to 0$ 及

$$|\lambda(t)|\to|m|,\quad |\boldsymbol{a}|\text{是常数}$$

有

$$|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}|\longrightarrow 0$$

即

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)\longrightarrow m\boldsymbol{a}$$

(3) 作出数量差

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{s}(t)+(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$$

由此得出

$$|\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{s}(t)| + |(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}| \qquad (1.2)$$

因为任何两个向量 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ 的数量积 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos(\widehat{\boldsymbol{pq}})$ 所以

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}|\leqslant|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|.$$

因此，如果 $\boldsymbol{p}$ 趋于零(即 $|\boldsymbol{p}|\to 0$)，而 $\boldsymbol{q}$ 趋于确定的极限 $\boldsymbol{q}_0$(此时有 $|\boldsymbol{q}|\to|\boldsymbol{q}_0|$)，那么不等式的右边趋向于零．这时有

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}|\longrightarrow 0$$

因而当 $t\to t_0$ 时，我们由已知条件

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\longrightarrow 0,\quad |\boldsymbol{s}(t)|\longrightarrow|\boldsymbol{b}|$$

则不等式(1.2)右边第一项有

$$|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{s}(t)|\longrightarrow 0$$

同理

$$|(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}|\longrightarrow 0$$

于是得到

$$|\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\longrightarrow 0$$

即

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

(4) 作出向量的差

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})$$

由此得出

$$|\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \leqslant|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{s}(t)|+|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})| \qquad (1.3)$$

因为两个向量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的向量积的模 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cdot$

$\cdot|\sin(\widehat{pq})|$，所以$|p\times q|\leqslant|p||q|$．因此，如果$|p|\to0$，而$|q|$趋于确定的极限，则$|p\times q|\to0$．

把这个结论应用到不等式(1.3)的右边，则当$t\to t_0$时，由已知条件可得到

$$|r(t)\times s(t)-a\times b|\to0$$

即

$$r(t)\times s(t)\longrightarrow a\times b$$

2.2　向量函数的连续性

有了向量函数的极限的概念，我们就可以引进向量函数的连续性的概念．给出一元向量函数$r(t)$，当$t\to t_0$时，若向量函数$r(t)\to r(t_0)$，则称向量函数$r(t)$在t_0点是连续的．

利用极限的定义，我们把向量函数$r(t)$在t_0连续的定义可表示为

$$\lim_{t\to t_0}r(t)=r(t_0)$$

如果$r(t)$在区间$t_1\leqslant t\leqslant t_2$的每一点都连续，则称$r(t)$在区间$t_1\leqslant t\leqslant t_2$上是连续(*)的．

利用命题1的结果，我们可以得到：

命题 2　如果$r(t)$和$s(t)$是在点t_0连续的向量函数，而$\lambda(t)$是在点t_0连续的实函数，则向量函数$r(t)\pm s(t)$，$\lambda(t)r(t)$，$r(t)\times s(t)$和实函数$r(t)\cdot s(t)$也都在点t_0连续，(把命题中的点t_0改为区间$t_1\leqslant t\leqslant t_2$也成立)．

2.3　向量函数的微商

设$r(t)$是定义在区间$t_1\leqslant t\leqslant t_2$上的一个向量函数．设$t_0\in(t_1,t_2)$，如果极限

(*)　在端点$t=t_1$和$t=t_2$处指的是右连续和左连续．

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称 $\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 点是可微分的，这个极限称为 $\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 点的微商(或导矢)，用$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}$ 或 $\boldsymbol{r}'(t_0)$表示，即

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}=\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 在某个开区间的每一点都有微商存在，则我们说 $\boldsymbol{r}(t)$在此区间内是可微的或简称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$是可微的，它的微商记成 $\boldsymbol{r}'(t)$.

对于向量函数的微分法有以下命题:

命题 3 设 $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{s}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$分别是可微的向量函数，$\lambda(t)$是可微的实函数， 则 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)$, $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)$, $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$, $(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{u}(t))$都是可微的，并且

$$(\lambda\boldsymbol{r})'=\lambda\boldsymbol{r}'+\lambda'\boldsymbol{r}$$

$$(\boldsymbol{r}\pm\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\pm\boldsymbol{s}'$$

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}'$$

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}'$$

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})'=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}')$$

这些公式的证明和数学分析中实函数的对应公式的证明相似，但是应该注意的是向量的向量积和混合积跟向量的次序有关，不能把次序任意交换. 作为例子，我们证明后面三个结果.

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)]\times\boldsymbol{s}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{r}(t)\times[\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)]}{\Delta t}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\times\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{s}(t+\Delta t)$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{r}(t)\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}$$

$$=\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}'(t)$$

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)]\cdot\boldsymbol{s}(t+\Delta t)}{\Delta t}\right.$$

$$\left.+\frac{\boldsymbol{r}(t)\cdot[\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)]}{\Delta t}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{s}(t+\Delta t)$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{r}(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}$$

$$=\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}'(t)$$

由上面的结果可以得到

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})'=[(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}]'$$

$$=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}'$$

$$=[\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}']\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}'$$

$$=(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}')\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\boldsymbol{u}'$$

$$=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}')$$

向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$的微商 $\boldsymbol{r}'(t)$仍为 t 的一个向量函数，如果函数 $\boldsymbol{r}'(t)$也是连续的和可微的，则 $\boldsymbol{r}'(t)$的微商 $\boldsymbol{r}''(t)$ 称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的**二阶微商**. 类似地可以定义三阶、四阶等等的微商、在区间 $[t_1, t_2]$ 上有直到 k 阶连续微商的函数称为这区间上的 **k 次可微函数**或 **C^k 类函数**，连续函数也称为 C^0 类函数，无限可微的函数记为 C^∞ 类函数. 解析函数记为 C^ω 类函数.

设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 是笛卡儿直角坐标系的三个基向量，向量函数

$\boldsymbol{r}(t)$可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$$

所以每一个向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$和三个实函数$\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$一一对应.

命题 4 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_1, t_2]$上是 C^k 类函数，则向量函数所对应的三个实函数 $x(t), y(t), z(t)$在$[t_1, t_2]$上是 C^k 类函数.

证明 将 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$ 两边点乘 $\boldsymbol{e}_1$ 得

$$x(t)=\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{e}_1$$

由于$\boldsymbol{e}_1$ 是常向量，而 $\boldsymbol{r}(t)$是 C^k 类函数，所以 $x(t)$是 C^k 类函数.

同理可证 $y(t), z(t)$是 C^k 类函数.

2.4 向量函数的泰勒(Taylor)公式

定理 设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_0, t_0+\Delta t]$上是 C^{n+1} 类函数，则有泰勒展开式

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\,\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots$$

$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)-\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)]$$

其中 $\Delta t\to 0$ 时，$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \Delta t)\to 0$.

证明 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$可表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$$

由已知条件在 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 有 $\boldsymbol{r}(t)\in C^{n+1}$，所以在 $[t_0, t_0-\Delta t]$ 有 $x(t), y(t), z(t)\in C^{n+1}$.

根据实函数的泰勒公式得知

$$x(t_0+\Delta t)=x(t_0)+\Delta t\,x'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}x''(t_0)+\cdots$$

$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}x^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}(x^{(n+1)}(t_0)+\varepsilon_1(t_0,\Delta t))$$

$$y(t_0+\Delta t)=y(t_0)+\Delta t y'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}y''(t_0)+\cdots$$

$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}y^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n-1)!}(y^{(n+1)}(t_0)+\varepsilon_2(t_0,\Delta t))$$

$$z(t_0+\Delta t)=z(t_0)+\Delta t z'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}z''(t_0)+\cdots$$

$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}z^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n-1)!}(z^{(n+1)}(t_0)+\varepsilon_3(t_0,\Delta t))$$

把上式分别乘以 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 再相加，则得到所求的向量函数的泰勒公式

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots$$

$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)]$$

当 $\boldsymbol{r}(t)\in C^\infty$ 时，我们就可以把它展成泰勒级数．即

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots$$

$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\cdots\cdots$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)\in C^\omega$，则上述泰勒级数是收敛的。

2.5 向量函数的积分

向量函数的积分的定义和实函数的情形相同，即

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$$

其中 $a=t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n=b$ 表示区间$[a, b]$的分点，ξ_i 是区间(t_{i-1}, t_i)中的任一点，当 $n\to\infty$ 时，$|t_i-t_{i-1}|\to 0$.

如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$ 是可积的，则有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\int_a^b(x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3)dt$$

$$=\boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)dt+\boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)dt+\boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)dt$$

即

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)dt+\boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)dt+\boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)dt$$

由此可得出有关向量函数积分的命题:

命题5 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$是区间$[a, b]$上的连续函数，则积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt$$

存在,并且

1° $a<c<b$时有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\int_a^c \boldsymbol{r}(t)dt+\int_c^b \boldsymbol{r}(t)dt$$

2° m是常数时有

$$\int_a^b m\boldsymbol{r}(t)dt=m\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt$$

3° 如果$\boldsymbol{m}$是常向量,则有

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{m}\cdot\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt$$

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{m}\times\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt$$

4° $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x \boldsymbol{r}(t)dt\right]=\boldsymbol{r}(x)$

证明 向量函数可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3 \tag{1.4}$$

根据命题4可知若$\boldsymbol{r}(t)$在$[a, b]$上是连续函数 (C^0类函数)，则$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$在$[a, b]$上是连续函数(C^0类函数).

再由实函数的积分定理可知,在区间$[a, b]$上连续的实函数在该区间上是可积的,即积分

$$\int_a^b x(t)dt,\quad \int_a^b y(t)dt,\quad \int_a^b z(t)dt$$

存在，则由(1.4)式可知积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt$$

存在且等于

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)dt+\boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)dt+\boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)dt$$

以下我们只证明1°，其余的结果请读者自己证明。

由于

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)dt+\boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)dt+\boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)dt$$

若 $a<c<b$ 时，根据实函数的积分性质可得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)dt+\boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)dt+\boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)dt\\
=&\boldsymbol{e}_1\left[\int_a^c x(t)dt+\int_c^b x(t)dt\right]+\boldsymbol{e}_2\left[\int_a^c y(t)dt+\int_c^b y(t)dt\right]\\
&+\boldsymbol{e}_3\left[\int_a^c z(t)dt+\int_c^b z(t)dt\right]\\
=&\boldsymbol{e}_1\int_a^c x(t)dt+\boldsymbol{e}_2\int_a^c y(t)dt+\boldsymbol{e}_3\int_a^c z(t)dt+\boldsymbol{e}_1\int_c^b x(t)dt\\
&+\boldsymbol{e}_2\int_c^b y(t)dt+\boldsymbol{e}_3\int_c^b z(t)dt\\
=&\int_a^c \boldsymbol{r}(t)dt+\int_c^b \boldsymbol{r}(t)dt
\end{aligned}$$

下面我们介绍有关向量函数的两个命题，这两个命题在以后要用到。

我们在这里假定所给出的向量函数具有所需要的各阶连续微商。

命题6 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有固定长的充要条件是对于 t 的每一个值，$\boldsymbol{r}'(t)$ 都与 $\boldsymbol{r}(t)$ 垂直。

证明 由所给条件$|\boldsymbol{r}(t)|=$常数，有

$$\boldsymbol{r}^2(t)=|\boldsymbol{r}(t)|^2=\text{常数}$$

上式对 t 求微分得

$$2\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$$

由此得到

$$\boldsymbol{r}(t)\perp\boldsymbol{r}'(t)$$

反之，如果 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$

则有

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}^2(t)=0$$

因而得到

$$\boldsymbol{r}^2(t)=\text{常数}$$

即

$$|\boldsymbol{r}(t)|=\text{常数}$$

特别地，对于可微的单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$(即$|\boldsymbol{r}(t)|=1$)，有 $\boldsymbol{r}(t)\perp\boldsymbol{r}'(t)$.

为了介绍以下命题，我们先引入关于向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$对于变量 t 的旋转速度的概念．这个旋转速度对于 t 的不同的值一般来说具有不同的值．

我们给出以下定义：给 t 以增值 Δt，用 $\Delta\varphi$ 表示由向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 所组成的角（图 1-7)，作成比值$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$，并使 Δt 趋于零，则$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$的极限，即$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$ 就叫做向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$对于它的变量 t 的旋转速度．

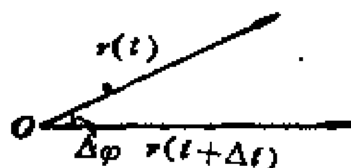


图 1-7

命题 7 单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$(即$|\boldsymbol{r}(t)|=1$)关于 t 的旋转速度等于其微商的模$|\boldsymbol{r}'(t)|$。

证明 把 $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 移动到同一个始点 O（如图 1-8），以 O 为圆心画单位圆，它通过 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 的终点 M、M'，则两个向量的夹角大小等于 $\overset{\frown}{MM'}$ 的长度．于是有

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\Delta t|}=\frac{|\overrightarrow{MM'}|}{|\Delta t|}\cdot\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}$$

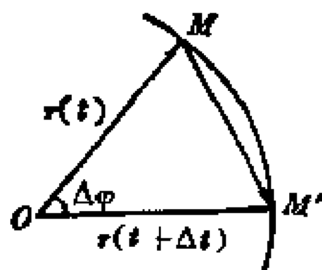


图 1-8

因为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{MM'}$

所以有

$$|\overrightarrow{MM'}|=|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|$$

于是

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|\cdot\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}$$

由于当 Δt 趋于零时有

$$\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}=1$$

因此

$$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|\cdot\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}$$

$$=|\boldsymbol{r}'(t)|$$

习　题

1 证明本节课文命题 3、命题 5 中未加证明的结论．

2 求证常向量的微商等于零．

3 利用向量函数的泰勒公式证明：如果向量在某一区间内所有的点，其微商为零，则此向量在该区间是常向量．

§3 曲线的概念

曲线是微分几何所研究的主要对象之一，因而我们需要首先弄清楚曲线的概念.

3.1 曲线的概念

为了定义曲线的概念，先介绍一些关于映射的知识.

给出两个集合 E 和 E'，如果集合 E 中的每一个点(或称元素) x，有 E' 中一个或几个点和它对应，则我们说给定了 E 到 E' 的一个映射 f. 我们以后仅考虑单值映射，换言之，对于 E 中每一个点 x，在 E' 中只有唯一一个点 x' 和它对应，这种映射称为**单值映射**，x' 称为点 x 的**象**，x 称为 x' 的**原象**.

如果对于集合 E' 中每一个点 x'，在 E 中只有唯一一个原象 x 和它对应，则这个映射称为是**一一的**.

在欧氏空间中给出两个集合 E, E'，对于 E 的任一个点 X 和任一个数 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使得对于 E 中同 X 的距离小于 δ 的任意一点 Y 来说，点 $f(Y)$ 与 $f(X)$ 间的距离小于 ε，则称映射 f 为**连续的**.

如果 $f(E)=E'$，我们就说 f 是从 E 到 E' 的**在上映射**，也就是说在 f 的作用下把 E 变到整个 E' 上去.

下面建立简单曲线的概念.

如果一个开的直线段到三维欧氏空间内建立的对应 f 是一一的，双方连续的在上映射，则我们把三维欧氏空间中的映射的象称为**简单曲线段**. 例如开的直线段映射到开圆弧(即圆周的一部分)，

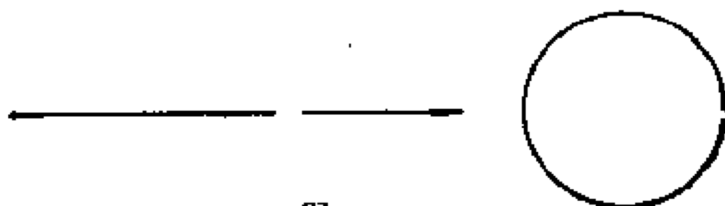


图 1-9

这种映射是一一的，双方连续的在上映射(图 1-9)，因此开圆弧是简单曲线段.

又例如在一张长方形的纸上画一条斜的直线(图 1-10)，然后把这张纸卷成圆柱面，则直线成为圆柱螺线. 因而圆柱螺线是简单曲线段.



图 1-10

对任意曲线的"小范围"的研究，总可以作为简单曲线段来研究. 我们以后所讨论的曲线都是简单曲线段，不另作声明.

根据上述曲线的概念，我们可以确立曲线的方程. 在直线段上引入坐标 $t(a<t<b)$，在空间中引入笛卡儿直角坐标 (x, y, z)，则上述映射的解析表达式是

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases} \quad (a<t<b) \tag{1.5}$$

习惯上，经常把(1.5)中的函数关系符号 f, g, h 分别写成 x, y, z，这样(1.5)可写为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad (a<t<b) \tag{1.6}$$

(1.6)称为曲线的**参数表示**或**参数方程**，t 称为**曲线的参数**.

例如，我们已经知道开圆弧是开直线段的象，取开直线段为 $(0, 2\pi)$，则在 xy 平面上，开圆弧的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} \quad (0<t<2\pi)$$

其中 a 为圆的半径.

开的椭圆弧的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t. \end{cases} \qquad (0<t<2\pi)$$

对于圆柱螺线，我们可以这样建立它的参数方程. 设直圆柱底半径为 a，在长方形中斜线与长方形的一边的夹角为 φ_0(如图1-11). 由圆柱螺线上任一点 M 作 xy 平面的垂线为 MN. 设 ON 与 Ox 轴的夹角为 t，则 $AN=at$，$MN=at\,\mathrm{tg}\,\varphi_0=bt$(设 $b=a\,\mathrm{tg}\,\varphi_0$).

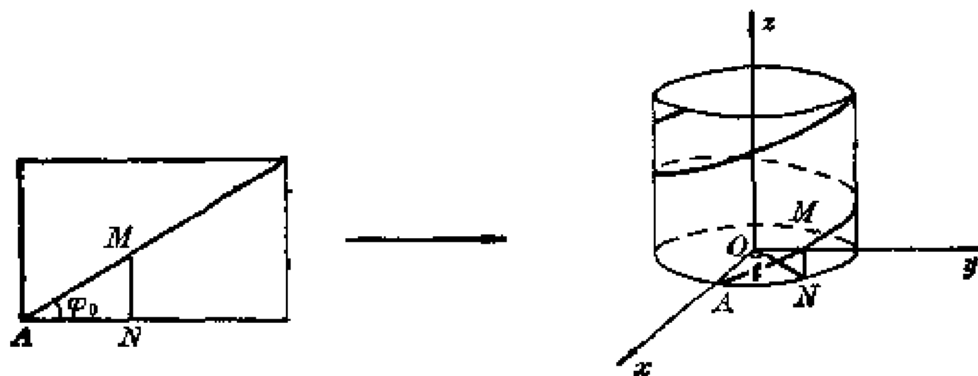


图 1-11

则圆柱螺线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases} \qquad (-\infty<t<+\infty)$$

由于向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 可表示为 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$，因而曲线的参数方程(1.6)也可以写成向量函数的形式：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \qquad (a<t<b)$$

这就是说，在空间中给定一个点 O，以这个点作为始点放上对于 t 的所有值的向量 $\boldsymbol{r}(t)$. 于是对于 t 的每个值，我们得到确定的向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}(t)$(图1-12)，它的始点是点 O，而终点 M 则与 t 值有关，当 t 在 (a,b) 内变化时，点 M 在空间中画出一条轨迹，这就

是由参数 t 所给定的曲线. 点M的向量表达式称为曲线的**向量参数表示**.

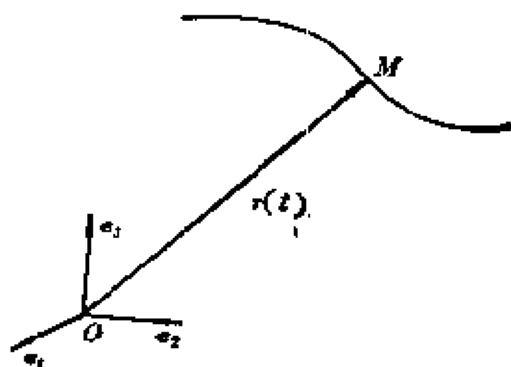


图 1-12

例如圆(挖掉$(a, 0)$点)的向量参数表示式是

$$r=\{a\cos t,\ a\sin t\}\quad(0<t<2\pi)$$

即

$$r=a\cos t\,e_1+a\sin t\,e_2\qquad(0<t<2\pi)$$

椭圆(挖掉$(a, 0)$点)的向量参数表示式是

$$r=\{a\cos t,\ b\sin t\}\qquad(0<t<2\pi)$$

即

$$r=a\cos t\,e_1+b\sin t\,e_2\qquad(0<t<2\pi)$$

圆柱螺线的向量参数表示式是

$$r=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}\qquad(-\infty<t<+\infty)$$

即

$$r=a\cos t\,e_1+a\sin t\,e_2+bt\,e_3\qquad(-\infty<t<+\infty)$$

3.2 光滑曲线　曲线的正常点

如果曲线的参数表示式

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\qquad(a<t<b)$$

或

$$r=r(t)\qquad(a<t<b)$$

中的函数是k阶连续可微的函数, 则把这曲线称为**C^k类曲线**. 当$k=1$时, 也就是C^1类的曲线又称为**光滑曲线**.

给出C^1类的曲线$r=r(t)$, 假设对于曲线$r=r(t)$上一点(t

$=t_0$)有

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$$

则这一点称为曲线的**正常点**.

注意条件 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$ 表示 $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ 中至少有一个不等于零.

以后我们只考虑曲线的正常点，即假设 $\boldsymbol{r}'(t)\neq 0$. 实际上 $\boldsymbol{r}'(t)=0$ 是很特殊的. 如果在一段曲线上 $\boldsymbol{r}'(t)\equiv 0$,则 $\boldsymbol{r}(t)$变成常向量，这时这段曲线缩成一点，所以一段曲线上 $\boldsymbol{r}'(t)=0$的点一般是孤立点. 曲线(C)上所有点都是正常点时，则称(C)为**正则曲线**.

给出曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)\qquad (a<t<b)$

即

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\qquad (a<t<b)$$

则在曲线的正常点(例如，设 $x'(t_0)\neq 0$)的充分小邻域里，曲线可由形如

$$\begin{cases}y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)\end{cases}$$

的方程来表示.

这是因为由于 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$, 而我们假设 $x'(t_0)\neq 0$, 于是函数 $x=x(t)$在 t_0 邻近有连续而可微的反函数 $t=t(x)$. 把它代入

$$\begin{cases}y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

中得

$$\begin{cases}y=y(t(x))\\ z=z(t(x))\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$$

例如对于圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ 有 $\boldsymbol{r}'(t)=\{-a\sin t, a\cos t, b\}$. 由于 $b\neq 0$ 所以在曲线上任何 t 值 $\boldsymbol{r}'(t)\neq 0$, 因此圆柱螺线上的点都是正常点. 因而由 $z=bt$ 得出 $t=\frac{1}{b}z$ 把它代入

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$$

中得

$$\begin{cases} x=a\cos\frac{z}{b} \\ y=a\sin\frac{z}{b} \end{cases}$$

这是圆柱螺线的另一种表示法.

3.3 曲线的切线和法面

给出曲线上一点 P, 点 Q 是 P 的邻近一点(图 1-13), 把割线 PQ 绕 P 点旋转, 使 Q 点沿曲线趋近于 P 点, 若割线 PQ 将趋近于一定的位置时, 我们把这个割线 PQ 的极限位置称为曲线在 P 点的切线. 而定点 P 称为切点. 直观上看, 切线是通过切点的所有直线当中最贴近曲线的直线.



图 1-13

设曲线的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

切点 P 对应参数 t_0, Q 点对应参数 $t_0+\Delta t$ (图 1-14), 则有

$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$$

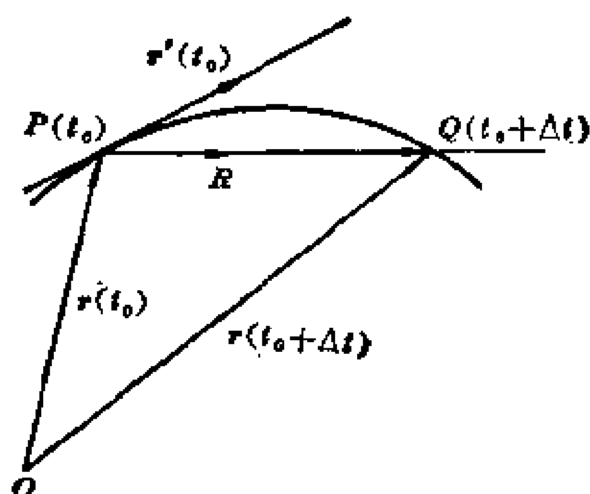


图 1-14

在割线 PQ 上作向量 $\overrightarrow{PR}$，使得

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

当 $Q\to P$(即 $\Delta t\to 0$)时，若 $\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 可微时，由向量函数的微商可得向量 $\overrightarrow{PR}$ 的极限

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

根据曲线的切线定义，得到 $\overrightarrow{PR}$ 的极限是切线上的一向量 $\boldsymbol{r}'(t)$，它称为曲线上一点的切向量.

由于我们已规定只研究曲线的正常点，即$\boldsymbol{r}'(t)\neq 0$，所以曲线上一点的切向量是存在的. 而这个切向量就是切线上的一个非零向量. 由以上的推导过程可以看出，这个切向量的正向和曲线的参数 t 的增值方向是一致的.

现在我们导出曲线上一点的切线方程.

仍设曲线上一个切点 P 所对应的参数为 t_0，P 点的向径是 $\boldsymbol{r}(t_0)$，$\boldsymbol{\rho}\{X, Y, Z\}$ 是切线上任一点的向径（图 1-15)，因为 $\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)\parallel \boldsymbol{r}'(t_0)$，则得 P 点的切线方程为

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)=\lambda\boldsymbol{r}'(t_0)$$

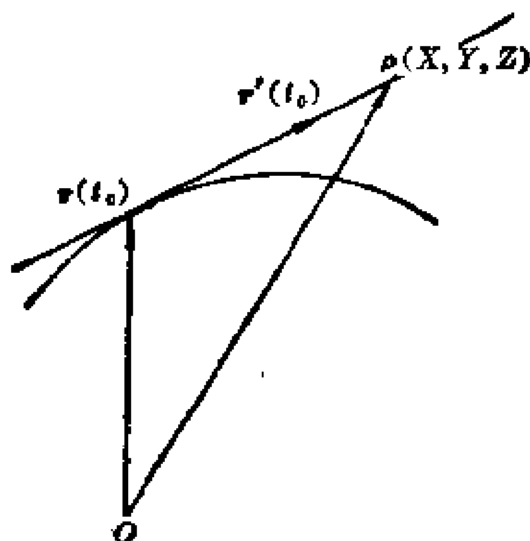


图 1-15

其中 λ 为切线上的参数.

下面再导出由坐标表示的切线方程. 设

$$r(t_0)=\{x(t_0),y(t_0),z(t_0)\}$$

$$r'(t_0)=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$$

则由上述切线方程消去 λ 得到

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

这是坐标表示的切线方程.

例 求圆柱螺线 $r(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$ 在 $t=\frac{\pi}{3}$ 处的切线方程.

解

$$r(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$$

$$r'(t)=\{-a\sin t, a\cos t, b\}$$

$t=\frac{\pi}{3}$ 时有

$$r\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left\{\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{\pi b}{3}\right\}$$

$$r'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},b\right\}$$

所以切线的方程为

$$\rho - r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lambda r'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

即

$$\rho = \frac{1-\lambda\sqrt{3}}{2}ae_1 + \frac{\sqrt{3}+\lambda}{2}ae_2 + \left(\frac{\pi}{3}+\lambda\right)be_3$$

如果用坐标表示，则得切线方程为

$$\frac{X-\dfrac{a}{2}}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{Y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a}{\dfrac{a}{2}} = \frac{Z-\dfrac{\pi}{3}b}{b}$$

即

$$\frac{2X-a}{-\sqrt{3}a} = \frac{2Y-\sqrt{3}a}{a} = \frac{Z-\dfrac{\pi}{3}b}{b}$$

经过切点，而垂直于切线的平面称为曲线的**法面**. 下面导出曲线的法面方程.

设曲线上一点P,它所对应的参数为t_0, P点的向径是$r(t_0)$, $\rho(X, Y, Z)$是法面上任一点的向径(图 1-16)，则由

$$\rho - r(t_0) \perp r'(t_0)$$

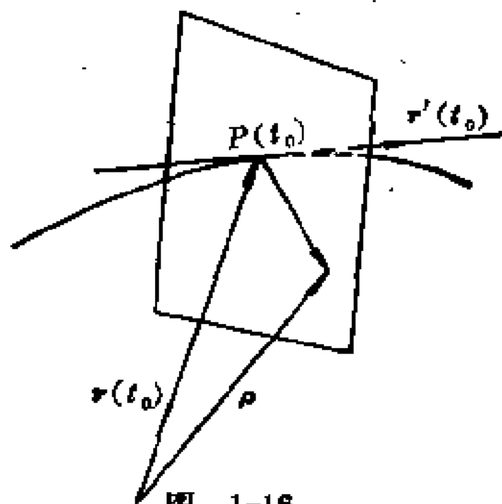


图 1-16

得到曲线的法面方程为

$$[\rho - r(t_0)]\cdot r'(t_0) = 0$$

若设
$$r(t_0) = \{x(t_0), y(t_0), z(t_0)\}$$
$$r'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$$

则由上述法面方程得到

$$[X-x(t_0)]x'(t_0) + [Y-y(t_0)]y'(t_0) + [Z-z(t_0)]z'(t_0) = 0$$

这是坐标表示的法面方程.

例 求圆柱螺线 $r(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$ 在 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的法面方程.

解 $r(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$

$$r'(t)=\{-a\sin t, a\cos t, b\}$$

$t=\frac{\pi}{6}$ 时有

$$r\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, \frac{\pi b}{6}\right\}$$

$$r'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left\{-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, b\right\}$$

所以法面的方程为

$$\left[\rho-r\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot r'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$$

即

$$\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(Y-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$
$$+\left(Z-\frac{\pi}{6}b\right)b=0$$

整理后得到

$$aX-\sqrt{3}aY-2bZ+\frac{\pi}{3}b^2=0$$

3.4 曲线的弧长 自然参数

到现在为止,我们所取的参数 t 一般不具有几何意义,以后在理论问题中,我们经常用弧长作为曲线的参数。

设给出 C^1 类曲线 (C):

$$r=r(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

曲线 (C) 上对应于 $r(a)$ 和 $r(b)$ 的点为 P_0 和 P_n. 在 (C) 上, 介于

P_0与P_n之间，顺着t递增的次序，取$n-1$个点$P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$，它们把曲线分为$n$个小弧段(图 1-17)．用直线段把相邻的分点连

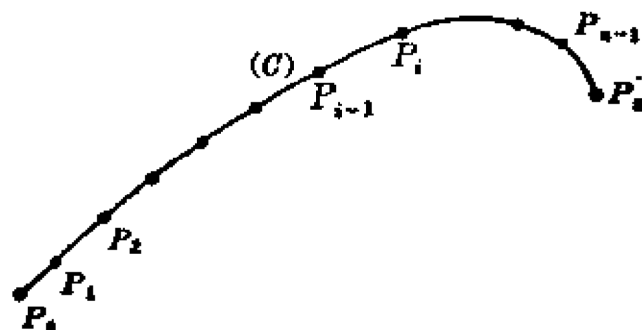


图 1-17

结起来，即得一条折线，它的长是

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$$

我们将证明，在所设的条件下，当分点无限制地增加，同时无限制地加“密”(即对于每一个i，$t_i-t_{i-1}\to 0$或$\overline{P_{i-1}P_i}\to 0$)时，$\sigma_n$趋于与分点的选择无关的一个确定的极限．这个极限定义为曲线段$\widehat{P_0P_n}$的弧长．我们还将证明，这个极限为

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\int_a^b|\boldsymbol{r}'(t)|dt \tag{1.7}$$

设分点P_i对应参数$t_i(i=0, 1, 2, \cdots, n)$，特别地$t_0=a$，$t_n=b$．这样，

$$\overline{P_{i-1}P_i}=|\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})|$$

而

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})\\
&=(x(t_i)-x(t_{i-1}))\boldsymbol{e}_1+(y(t_i)-y(t_{i-1}))\boldsymbol{e}_2\\
&\quad+(z(t_i)-z(t_{i-1}))\boldsymbol{e}_3\\
&=[x'(t_i')\boldsymbol{e}_1+y'(t_i'')\boldsymbol{e}_2+z'(t_i''')\boldsymbol{e}_3](t_i-t_{i-1})
\end{aligned}$$

其中t_i', t_i'', t_i'''都是t_{i-1}与t_i之间的值．令

$$\boldsymbol{R}_i = x'(t_i')\boldsymbol{e}_1 + y'(t_i'')\boldsymbol{e}_2 + z'(t_i''')\boldsymbol{e}_3$$

这时可写成

$$\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1}) = \boldsymbol{R}_i(t_i - t_{i-1})$$

为了证明(1.7)，我们估计以下的差：

$$\begin{aligned}&\overline{P_{i-1}P_i} - |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i - t_{i-1})\\&= [|\boldsymbol{R}_i| - |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|](t_i - t_{i-1})\end{aligned} \tag{1.8}$$

现在

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{R}_i| - |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})| &= \frac{|\boldsymbol{R}_i|^2 - |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|^2}{|\boldsymbol{R}_i| + |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|}\\&= \frac{\boldsymbol{R}_i^2 - [\boldsymbol{r}'(t_{i-1})]^2}{|\boldsymbol{R}_i| + |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|}\end{aligned}$$

上式中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_i^2 - [\boldsymbol{r}'(t_{i-1})]^2\\&= \{[x'(t_i')]^2 + [y'(t_i'')]^2 + [z'(t_i''')]^2\}\\&\quad - \{[x'(t_{i-1})]^2 + [y'(t_{i-1})]^2 + [z'(t_{i-1})]^2\}\\&= \{[x'(t_i')]^2 - [x'(t_{i-1})]^2\} + \{[y'(t_i'')]^2\\&\quad - [y'(t_{i-1})]^2\} + \{[z'(t_i''')]^2 - [z'(t_{i-1})]^2\}\end{aligned}$$

此式右端的三项中，第一项是

$$\begin{aligned}&[x'(t_i')]^2 - [x'(t_{i-1})]^2\\&= [x'(t_i') + x'(t_{i-1})][x'(t_i') - x'(t_{i-1})]\end{aligned}$$

其余两项是有关 y' 和 z' 的对应项．由于

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{R}_i| &= \sqrt{[x'(t_i')]^2 + [y'(t_i'')]^2 + [z'(t_i''')]^2}\\&\geqslant |x'(t_i')|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})| &= \sqrt{[x'(t_{i-1})]^2 + [y'(t_{i-1})]^2 + [z'(t_{i-1})]^2}\\&\geqslant |x'(t_{i-1})|\end{aligned}$$

因此 $$\frac{|x'(t_i') + x'(t_{i-1})|}{|\boldsymbol{R}_i| + |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|} \leqslant \frac{|x'(t_i')| + |x'(t_{i-1})|}{|\boldsymbol{R}_i| + |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|} \leqslant 1$$

与此同时，有关 y' 和 z' 的两个不等式也成立。根据以上计算，即得

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{R}_i|-|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})||\leqslant|x'(t_i')-x'(t_{i-1})|\\+|y'(t_i'')-y'(t_{i-1})|+|z'(t_i''')-z'(t_{i-1})|\end{aligned}\tag{1.9}$$

由于 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 在闭区间 $[a, b]$ 里是连续的，从而也是一致连续的。因此，已给 $\varepsilon>0$，当 n 充分大，而每一个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 充分短时，

$$|x'(t_i')-x'(t_{i-1})|<\varepsilon,$$
$$|y'(t_i'')-y'(t_{i-1})|<\varepsilon$$
$$|z'(t_i''')-z'(t_{i-1})|<\varepsilon$$

因此，在这个情况下，根据(1.8)与(1.9)有

$$|\overline{P_{i-1}P_i}-|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i-t_{i-1})|<3\varepsilon(t_i-t_{i-1})$$

此时

$$\begin{aligned}&\left|\sigma_n-\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i-t_{i-1})\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\overline{P_{i-1}P_i}-|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i-t_{i-1})|\\&\leqslant3\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\\&=3\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sigma_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i-t_{i-1})\\&=\int_a^b|\boldsymbol{r}'(t)|dt\end{aligned}$$

如果我们以 $\sigma(t)$ 表示从 $\boldsymbol{r}(a)$ 到 $\boldsymbol{r}(t)$ 的弧长，即

$$\sigma(t)=\int_t^a |r'(t)|dt$$

在此式中由于积分的上限大于下限，所得到的曲线的弧长总是正值.

现在我们定义一新函数 $s(t)$，使

$$s(t)=\begin{cases}\sigma(t) & (\text{当 } t>a \text{ 时})\\ 0 & (\text{当 } t=a \text{ 时})\\ -\sigma(t) & (\text{当 } t<a \text{ 时})\end{cases}$$

即

$$s(t)=\int_a^t |r'(t)|dt \tag{1.10}$$

在此式中我们取 t 值可以大于 a，也可以小于 a. 因此 $s(t)$ 也可能取负值，并按上述规定，t 增加的方向就是 s 增加的方向. 总之，s 表示为积分上限 t 的函数

$$s=s(t)$$

从(1.10)可以推出

$$s'(t)=|r'(t)|>0$$

由此可见，函数 $s(t)$ 是 t 的单调递增函数. 因而函数 $s(t)$ 的反函数存在，设此反函数为 $t=t(s)$. 把它代入曲线的方程 $r=r(t)$ 中得到以 s 为参数的曲线方程

$$r=r(s)$$

或

$$\begin{cases}x=x(s)\\ y=y(s)\\ z=z(s)\end{cases}$$

我们把 s 称为曲线的**自然参数**，上式就是曲线的自然参数表示式.

从(1.10)可以得出

$$ds = |\boldsymbol{r}'(t)|dt \tag{1.11}$$

或

$$ds^2 = \boldsymbol{r}'^2 dt^2 = d\boldsymbol{r}^2 \tag{1.12}$$

或

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.13}$$

由(1.12)还可以推出

$$|\boldsymbol{r}'(s)| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = 1 \tag{1.14}$$

即向径关于自然参数的微商的模等于1. 也就是说,引进自然参数s后,切向量$\boldsymbol{r}'(s)$是单位向量. 这个导向量称为单位切向量.

以后我们用"点"代替"撇"表示向量函数对于自然参数的微商. 例如

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \text{等等}$$

例 求双曲螺线$\boldsymbol{r} = \{a\cosh t, a\sinh t, at\}$从$t=0$起计算的弧长.

解 $\boldsymbol{r} = \{a\cosh t, a\sinh t, at\}$

$\boldsymbol{r}' = \{a\sinh t, a\cosh t, a\}$

从$t=0$起计算的弧长为

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt \\
&= \int_0^t \sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2\cosh^2 t + a^2}\,dt \\
&= \int_0^t \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1) + a^2\cosh^2 t}\,dt \\
&= \int_0^t \sqrt{a^2\cosh^2 t + a^2\cosh^2 t}\,dt \\
&= \sqrt{2}\,a\sinh t
\end{aligned}$$

习 题

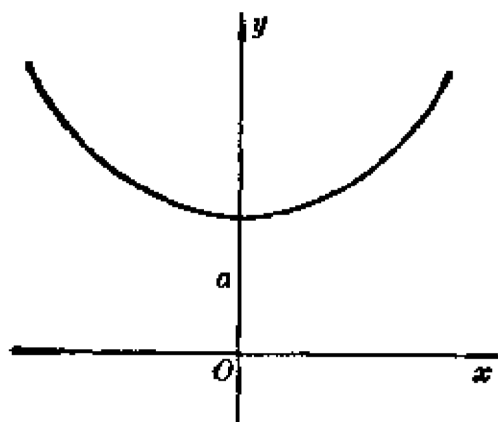
1 对于圆柱螺线 $x=\cos t, y=\sin t, z=t$，求它在点 $(1,0,0)$ 的切线和法面.

2 求三次挠曲线 $r=\{at, bt^2, ct^3\}$ 在点 t_0 的切线和法面.

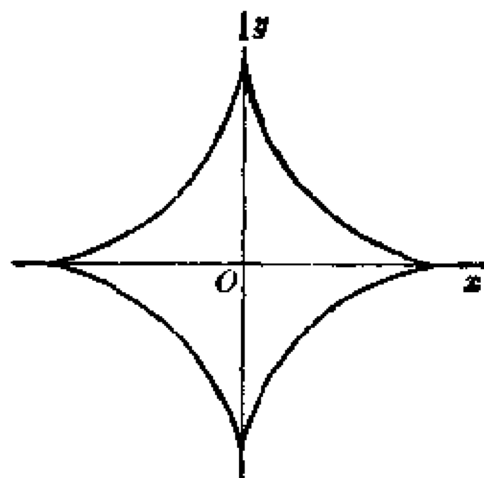
3 证明圆柱螺线 $r=\{a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\}$ $(-\infty<\theta<+\infty)$ 的切线和 z 轴作固定角.

4 求悬链线(如图) $r=\left\{t, a\cosh\frac{t}{a}\right\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ 从 $t=0$ 起计算的弧长.

5 求抛物线 $y=bx^2$ 对应于 $-a\leqslant x\leqslant a$ 的一段的弧长.



(第 4 题图)



(第 6 题图)

6 求星形线(如图) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的弧长.

7 求旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 一段的弧长.

8 求用极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 给定的曲线的弧长表达式.

§4 空间曲线

这一节，我们研究空间曲线的基本理论，主要将研究刻划空间曲线在某点邻近的弯曲程度和离开平面程度的量——曲率和挠率，以及研究空间曲线在一点邻近的近似形状，并将找出决定空间曲线的条件.

4.1 空间曲线的密切平面

在§3里我们已经讨论过，在C^1类曲线的正常点处，总存在一条切线，它是最贴近曲线的直线. 下面我们将指出，对于一条C^2类空间曲线而言，过曲线上一点有无数多个切平面，其中有一个最贴近曲线的切平面，它在讨论曲线的性质时起很重要的作用.

定义 过空间曲线上P点的切线和P点的邻近一点Q可作一平面σ，当Q点沿着曲线趋于P时，平面σ的极限位置π称为曲线在P点的**密切平面**.

现在我们找出密切平面的方程.

给出C^2类的曲线(C):

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

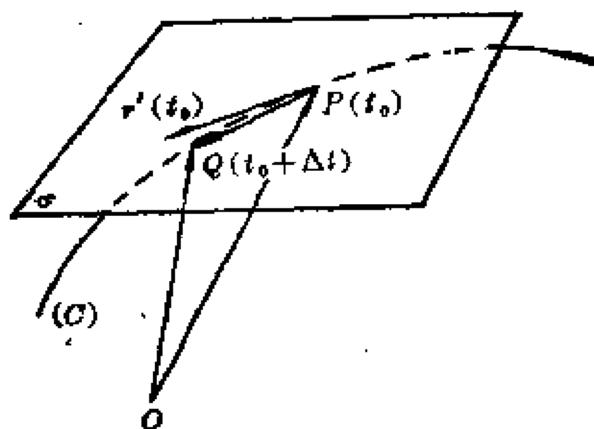


图 1-18

设曲线(C)上的P和Q点分别对应参数t_0和$t_0+\Delta t$(如图1-18).根据泰勒公式有

$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$$
$$=\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}''(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon})\Delta t^2$$

其中$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}$.

因为向量$\boldsymbol{r}'(t_0)$和$\overrightarrow{PQ}$都在平面σ上，所以它们的线性组合

$$\frac{2}{\Delta t^2}\left[\overrightarrow{PQ}-\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t\right]=\boldsymbol{r}''(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}$$

也在平面 σ 上.

当 Q 点沿着曲线趋于 P 时, $\Delta t\to 0$, 这时 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 不动, 但 $\boldsymbol{\varepsilon}\to\boldsymbol{0}$, 这个线性组合向量就趋于 $\boldsymbol{r}''(t_0)$. 所以平面 σ 的极限位置是向量 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 和 $\boldsymbol{r}''(t_0)$ 所确定的平面. 也就是说, 如果 $\boldsymbol{r}''(t_0)$ 和曲线在 P 点的切向量 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 不平行, 即 $\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)\neq\boldsymbol{0}$*), 这两个向量以及 P 点就完全确定了曲线在 P 点的密切平面.

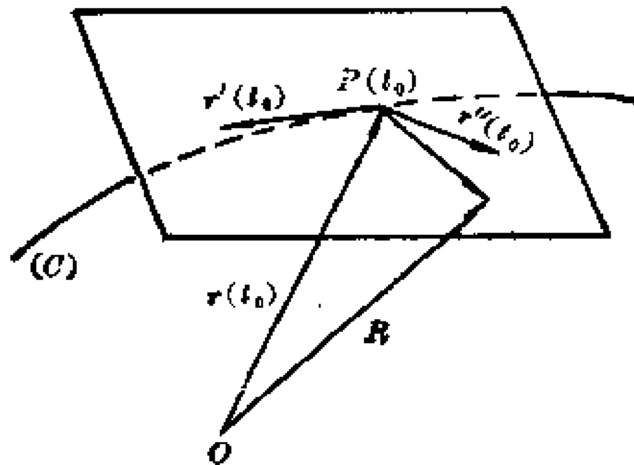


图 1-19

根据以上的讨论, 曲线 (C) 在 $P(t_0)$ 点的密切平面(如图 1-19)的方程是

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(t_0),\ \boldsymbol{r}'(t_0),\ \boldsymbol{r}''(t_0))=0$$

其中 $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$ 表示 P 点的密切平面上任意一点的向径.

上式也可用行列式表示为

$$\begin{vmatrix} X-x(t_0) & Y-y(t_0) & Z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0$$

---

*) 对于曲线上某一点 $(t=t_0)$ 有

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)=\boldsymbol{0}\quad 或即\quad \boldsymbol{r}'(t_0)\parallel\boldsymbol{r}''(t_0)$$

则这点称为曲线上的逗留点. 以后我们假定曲线上所讨论的点为非逗留点, 即假定

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)\neq\boldsymbol{0}\quad 或即\quad \boldsymbol{r}'(t_0)\nparallel\boldsymbol{r}''(t_0)$$

若曲线(C)用自然参数表示

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

则曲线(C)在$P(s_0)$点的密切平面的方程是

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(s_0),\dot{\boldsymbol{r}}(s_0),\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0))=0$$

或即

$$\begin{vmatrix} X-x(s_0) & Y-y(s_0) & Z-z(s_0) \\ \dot{x}(s_0) & \dot{y}(s_0) & \dot{z}(s_0) \\ \ddot{x}(s_0) & \ddot{y}(s_0) & \ddot{z}(s_0) \end{vmatrix}=0$$

注意：如果(C)是平面曲线，那么它在每一点的密切平面都是曲线(C)所在的平面。反过来，如果一条曲线的密切平面固定，则曲线是平面曲线，因为这个固定的密切平面经过曲线上每一点。

例 求螺线$x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=t$上点$(1, 0, 0)$的密切平面。

解 把点$(1,0,0)$代入所给曲线方程得$t=0$。由所给曲线

$$\boldsymbol{r}=\{\cos t, \sin t, t\}$$

可以求出

$$\boldsymbol{r}'=\{-\sin t, \cos t, 1\}$$

$$\boldsymbol{r}''=\{-\cos t, -\sin t, 0\}$$

把$t=0$代入得

$$\boldsymbol{r}(0)=\{1, 0, 0\}$$

$$\boldsymbol{r}'(0)=\{0, 1, 1\}$$

$$\boldsymbol{r}''(0)=\{-1, 0, 0\}$$

所求密切平面的方程为

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y & Z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

即

$$-Y+Z=0$$

4.2 空间曲线的基本三棱形

给出C^2类空间曲线(C)和(C)上一点P. 设曲线(C)的自然参数表示是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

其中s是自然参数. 则由§3得知

$$\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

是一单位向量. $\boldsymbol{\alpha}$称为曲线(C)上P点的**单位切向量**.

由于$|\boldsymbol{\alpha}|=1$, 根据§2命题6可以得到

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}\perp\boldsymbol{\alpha}$$

即

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\perp\dot{\boldsymbol{r}}$$

在$\dot{\boldsymbol{\alpha}}$上取单位向量

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|}=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|} \tag{1.15}$$

$\boldsymbol{\beta}$称为曲线(C)上P点的**主法向量**.

再作单位向量

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$$

$\boldsymbol{\gamma}$称为曲线(C)上P点的**副法向量**.

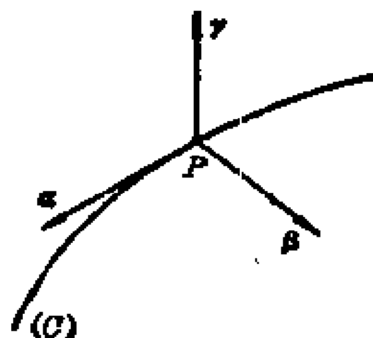


图 1-20

我们把两两正交的单位向量$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$称为曲线上P点的**伏雷内(Frenet)标架**. 由$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$知伏雷内标架构成右手系(图1-20).

因为$\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{\beta}\parallel\ddot{\boldsymbol{r}}$, 所以切向量和主法向量所确定的平面就是

曲线(C)在P点的密切平面.又因为β和γ都垂直于切向量α,所以β和γ所确定的平面是曲线上P点的法平面。至于α和γ所确定的平面则称为曲线(C)上P点的**从切平面**(图 1-21).

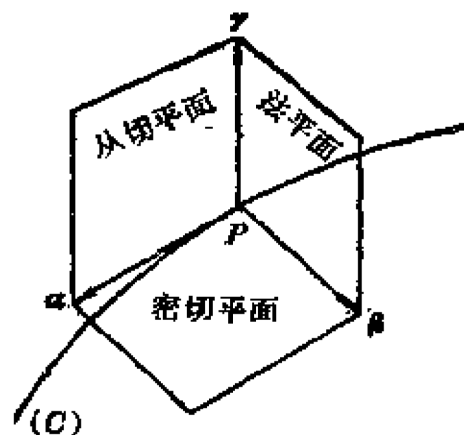


图 1-21

它们的方程分别为:

密切平面

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=0$$

或

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}})=0$$

法平面

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\alpha}=0$$

或

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$$

从切平面

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\beta}=0$$

或

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=0$$

单位向量$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$也称为曲线的**基本向量**. 由三个基本向量和密切平面、法平面、从切平面所构成的图形称为曲线的**基本三棱形**(如图 1-21). 当一点P沿曲线(C)移动时, 这个三棱形作为一个刚体来运动.

对于曲线(C)的一般参数表示

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

有

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}, \qquad \boldsymbol{\gamma}=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}=\frac{(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}''-(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'')\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'||\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}$$

例 求螺旋线 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ 在点(1, 0, 0)的切线、法平面、副法线、密切平面、主法线及从切平面的方程以及基本向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$.

解 由所给曲线

$$\boldsymbol{r}=\{\cos t, \sin t, t\}$$

先计算出

$$\boldsymbol{r}'=\{-\sin t, \cos t, 1\}$$

$$\boldsymbol{r}''=\{-\cos t, -\sin t, 0\}$$

由螺旋线方程 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ 可知点(1, 0, 0)对应参数 $t=0$。所以

$$\boldsymbol{r}(0)=\{1, 0, 0\}$$

$$\boldsymbol{r}'(0)=\{0, 1, 1\}$$

$$\boldsymbol{r}''(0)=\{-1, 0, 0\}$$

由此得出，在(1, 0, 0)点的切线方程为

$$\frac{X-1}{0}=\frac{Y-0}{1}=\frac{Z-0}{1}$$

即

$$\begin{cases}X-1=0\\ Y-Z=0\end{cases}$$

法平面方程为

$$(X-1)\cdot 0+(Y-0)\cdot 1+(Z-0)\cdot 1=0$$

即

$$Y+Z=0$$

密切平面方程为

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y & Z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

即

$$-Y+Z=0$$

主法线方程为

$$\begin{cases} Y+Z=0 \\ -Y+Z=0 \end{cases}$$

即

$$Y=Z=0$$

从切平面的方程为

$$(X-1)\cdot 1+(Y-0)\cdot 0+(Z-0)\cdot 0=0$$

即

$$X-1=0$$

副法线方程为

$$\begin{cases} Y+Z=0 \\ X-1=0 \end{cases}$$

以下求基本向量 α、β、γ

$$\alpha=\frac{r'}{|r'|}\bigg|_{t=0}=\frac{\{-\sin t, \cos t, 1\}}{\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-\sin t, \cos t, 1\}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0, 1, 1\}.$$

$$\beta=(\gamma\times\alpha)\bigg|_{t=0}=\frac{(r'\cdot r')r''-(r'\cdot r'')r'}{|r'||r'\times r''|}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{\{-2, 0, 0\}-\{0, 0, 0\}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\{-1, 0, 0\}$$

$$\gamma=\frac{r'\times r''}{|r'\times r''|}\Bigg|_{t=0}=\frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\{0,-1,1\}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,-1,1\}$$

4.3 空间曲线的曲率、挠率和伏雷内(Frenet)公式

我们首先研究空间曲线的曲率的概念．在不同的曲线或者同一条曲线的不同点处，曲线弯曲的程度可能不同．例如半径较大的圆弯曲程度较小，而半径较小的圆弯曲的程度较大(图 1-22)；又如图 1-23 中所示，当沿着曲线从左向右移动时，曲线弯曲的程度变大．为了准确地刻划曲线的弯曲程度，我们引进曲率的概念．

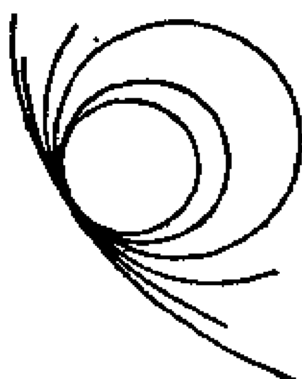


图 1-22

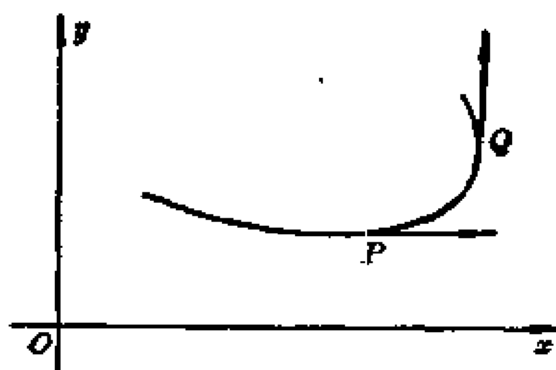


图 1-23

要从直观的基础上引出曲率的确切的定义，我们首先注意到，曲线弯曲的程度越大，则从点到点变动时，其切向量的方向改变得越快．所以作为曲线在已知一曲线段 PQ 的平均弯曲程度可取为曲线在 P、Q 间切向量关于弧长的平均旋转角．

设空间中 C^3 类曲线(C)的方程为

$$r=r(s)$$

曲线(C)上一点 P，其自然参数为 s，另一邻近点 P_1，自然参数为 $s+\Delta s$．在 P、P_1 两点各作曲线(C)的单位切向量 $\alpha(s)$和 $\alpha(s+$

Δs)．两个切向量间的夹角是 $\Delta\varphi$(图 1-24)，也就是把点 P_1 的切向量 $\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$ 平移到点 P 后，两个向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$ 的夹角为 $\Delta\varphi$．

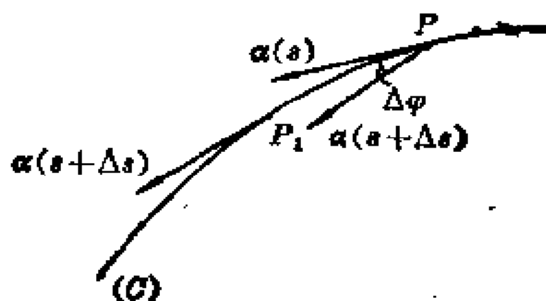


图 1-24

我们用空间曲线在点 P 处的切向量对弧长的旋转速度来定义曲线在点 P 的曲率．

定义 空间曲线 (C) 在 P 点的曲率为

$$k(s)=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

其中 Δs 为 P 点及其邻近点 P_1 间的弧长，$\Delta\varphi$ 为曲线在点 P 和 P_1 的切向量的夹角．

再利用 § 2 命题 7"一个单位变向量 $\boldsymbol{r}(t)$(即 $|\boldsymbol{r}(t)|=1$)的微商的模 $|\boldsymbol{r}'(t)|$ 的几何意义是 $\boldsymbol{r}(t)$ 对于 t 的旋转速度 $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$"．把这个结果应用到空间曲线 (C) 的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 上去，则有

$$k(s)=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

由于 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\ddot{\boldsymbol{r}}$，所以曲率也可由下式表示

$$k(s)=|\ddot{\boldsymbol{r}}|$$

由上述空间曲线的曲率的定义可以看出，它的几何意义是曲线的切向量对于弧长的旋转速度．当曲线在一点的弯曲程度越大，切向量对于弧长的旋转速度就越大，因此曲率刻划了曲线的弯曲程度．

对于空间曲线，曲线不仅弯曲而且还要扭转(离开密切平面)，

所以研究空间曲线只有曲率的概念是不够的，还要有刻划曲线扭转的程度的量——挠率．当曲线扭转时，副法向量(或密切平面)的位置随着改变(如图 1-25)，所以我们用副法向量(或密切平面)的转动速度来刻划曲线的扭转程度(在一点离开密切平面的程度)。

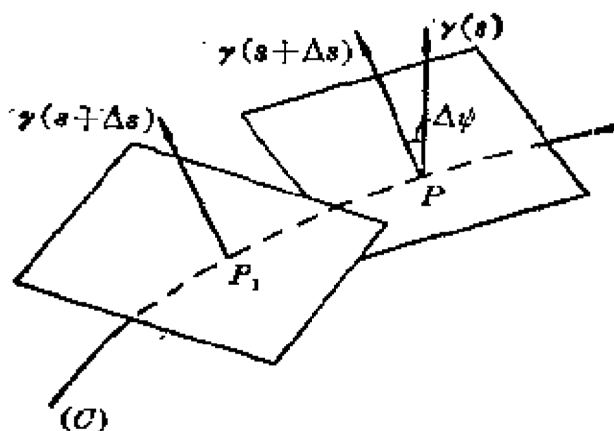


图 1-25

现在设曲线(C)上一点P的自然参数为s，另一邻近点P_1的自然参数为 $s+\Delta s$，在P、P_1两点各作曲线(C)的副法向量$\boldsymbol{\gamma}(s)$和$\boldsymbol{\gamma}(s+\Delta s)$。此两个副法向量的夹角是$\Delta\psi$(图 1-25)．

我们把 § 2 命题 7 应用到空间曲线(C)的副法向量$\boldsymbol{\gamma}$上去，得到

$$|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|=\left|\frac{d\psi}{ds}\right| \tag{1.16}$$

此式的几何意义是它的数值为曲线的副法向量(或密切平面)对于弧长的旋转速度．当曲线在一点的扭转程度越大(离开所讨论点的密切平面的程度越大)，副法向量(或密切平面)对于弧长的旋转速度就越大．因此，我们可以用它来刻划曲线的扭转程度。

根据(1.15)和曲率的定义，我们有

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{k(s)}$$

即

$$\dot{\alpha}=k(s)\beta \tag{1.17}$$

对 $\gamma=\alpha\times\beta$ 求微商，有

$$\dot{\gamma}=(\alpha\times\beta)^{\cdot}=\dot{\alpha}\times\beta+\alpha\times\dot{\beta}=k(s)\beta\times\beta+\alpha\times\dot{\beta}=\alpha\times\dot{\beta}$$

因而

$$\dot{\gamma}\perp\alpha$$

又因为 γ 是单位向量，所以

$$\dot{\gamma}\perp\gamma$$

由以上两个关系可以推出

$$\dot{\gamma}\parallel\beta \tag{1.18}$$

再由(1.16)，(1.18)有

$$\dot{\gamma}=\pm\left|\frac{d\psi}{ds}\right|\beta$$

现在我们给出挠率的定义如下:

定义 曲线(C)在P点的挠率为

$$\tau(s)=\begin{cases}+\left|\dfrac{d\psi}{ds}\right| & \text{当 } \dot{\gamma} \text{ 和 } \beta \text{ 异向}\\ -\left|\dfrac{d\psi}{ds}\right| & \text{当 } \dot{\gamma} \text{ 和 } \beta \text{ 同向}\end{cases}$$

挠率的绝对值是曲线的副法向量(或密切平面)对于弧长的旋转速度.

根据挠率的定义有

$$\dot{\gamma}=-\tau(s)\beta \tag{1.19}$$

另外，对 $\beta=\gamma\times\alpha$ 求微商，并利用(1.19)和(1.17)，可以推导出

$$\begin{aligned}\dot{\beta}&=(\gamma\times\alpha)^{\cdot}=\dot{\gamma}\times\alpha+\gamma\times\dot{\alpha}\\&=-\tau(s)\beta\times\alpha+\gamma\times k(s)\beta\\&=-k(s)\alpha+\tau(s)\gamma\end{aligned} \tag{1.20}$$

公式(1.17)，(1.20)，(1.19)称为空间曲线的伏雷内(Frenet)公

式。即

$$\begin{cases}\dot{\alpha}=k(s)\beta\\ \dot{\beta}=-k(s)\alpha+\tau(s)\gamma\\ \dot{\gamma}=-\tau(s)\beta\end{cases}\tag{1.21}$$

这组公式是空间曲线论的基本公式. 它的特点是基本向量α、β、γ关于弧长 s 的微商可以用 α、β、γ 的线性组合来表示. 它的系数组成反称的方阵

$$\begin{pmatrix}0 & k(s) & 0\\ -k(s) & 0 & \tau(s)\\ 0 & -\tau(s) & 0\end{pmatrix}$$

以下导出曲率和挠率的一般参数表示式。

给出 C^3 类的空间曲线(C):

$$r=r(t)$$

则有

$$r'=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}=\dot{r}\frac{ds}{dt}$$

$$r''=(\dot{r})'\frac{ds}{dt}+\dot{r}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d\dot{r}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\dot{r}\frac{d^2s}{dt^2}=\ddot{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\dot{r}\frac{d^2s}{dt^2}$$

所以

$$r'\times r''=\dot{r}\frac{ds}{dt}\times\left[\ddot{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\dot{r}\frac{d^2s}{dt^2}\right]=\dot{r}\times\ddot{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

由上式得

$$|r'\times r''|=|\dot{r}|\,|\ddot{r}|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\sin\theta$$

注意上式中

$$|\dot{r}|=1,\quad \dot{r}\perp\ddot{r},\qquad \frac{ds}{dt}=|r'|$$

因而有

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=k|\boldsymbol{r}'|^3$$

由此得到曲率的一般参数表示式

$$k=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}$$

再由伏雷内公式的(1.19)式

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\tau\boldsymbol{\beta}$$

两边点乘 $\boldsymbol{\beta}$ 得

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\boldsymbol{\beta}=-\tau\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}$$

因而

$$\begin{aligned}
\tau=-\dot{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\\
&=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\left(\frac{1}{k}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\cdot}\\
&=\left(\boldsymbol{\alpha}\times\frac{1}{k}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{1}{k}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\right)\\
&=\left(\dot{\boldsymbol{r}}\times\frac{1}{k}\ddot{\boldsymbol{r}}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}\ddot{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{k}\dddot{\boldsymbol{r}}\right)\\
&=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{k^2}\\
&=\frac{|\boldsymbol{r}'|^6(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')^2}
\end{aligned}$$

再把

$$\boldsymbol{r}'=\dot{\boldsymbol{r}}\frac{ds}{dt}$$

$$\boldsymbol{r}''=\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\boldsymbol{r}'''=\dddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+3\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\ddot{\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{d^3s}{dt^3}$$

代入$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')$中得

$$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=\left(\frac{ds}{dt}\right)^6(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})$$

$$= |\boldsymbol{r}'|^6(\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})$$

所以得到

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2}$$

这是一般参数表示的挠率计算公式.

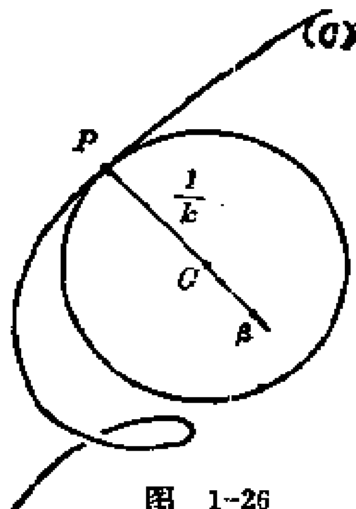


图 1-26

空间曲线(C)在一点的密切圆(曲率圆)是过曲线(C)上一点$P(s)$的主法线的正侧取线段PC, 使PC的长为$\frac{1}{k}$. 以C为圆心, 以$\frac{1}{k}$为半径在密切平面上确定一个圆, 这个圆称为曲线(C)在$P(s)$点的**密切圆(曲率圆)**, 曲率圆的中心称为**曲率中心**, 曲率圆的半径称为**曲率半径**.

例 求圆柱螺线 $\boldsymbol{r} = \{a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\}$ $(-\infty < \theta < +\infty)$ 的曲率和挠率.

解 由圆柱螺线方程

$$\boldsymbol{r} = \{a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\}$$

先计算

$$\boldsymbol{r}' = \{-a\sin\theta, a\cos\theta, b\}$$
$$\boldsymbol{r}'' = \{-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0\}$$
$$\boldsymbol{r}''' = \{a\sin\theta, -a\cos\theta, 0\}$$

则有

$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & b \\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \{ab\sin\theta, -ab\cos\theta, a^2\}$$

$$|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| = \sqrt{a^2 b^2 - a^4}$$

代入曲率和挠率的公式得

$$k=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\tau=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')^2}=\frac{ba^2}{a^2b^2+a^4}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

由以上可以看出，圆柱螺线的曲率和挠率都是常数。

例 证明曲率恒等于零的曲线是直线。

证明 已知 $k=|\ddot{\boldsymbol{r}}|\equiv 0$，因而

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=0$$

由此得到 $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{a}$（常向量）

再积分即得 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}$

其中 $\boldsymbol{b}$ 也是常向量。这是一条直线的参数方程。

例 证明挠率恒等于零的曲线是平面曲线。

证明 若 $\tau\equiv 0$，则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是固定向量，但是我们已知

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$$

因而有

$$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$$

积分后得

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}=a\text{（常数）}$$

所以曲线在一个平面上，即曲线是平面曲线。

读者试证上例的逆命题"平面曲线的挠率恒等于零"。

我们称挠率不恒为 0 的曲线为**挠曲线**。

4.4 空间曲线在一点邻近的结构

我们在这里研究空间曲线在某一个正常点的邻近的形状。

在 C^3 类曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 上取一点 $\boldsymbol{r}(s_0)$，为了研究点 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 邻近的形状，在它邻近再取一点 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$（图 1-27）。利用泰勒公式有

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)$$

$$=\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)(\Delta s)^2$$

$$+\frac{1}{3!}(\dddot{\boldsymbol{r}}(s_0)+\boldsymbol{\varepsilon})(\Delta s)^3$$

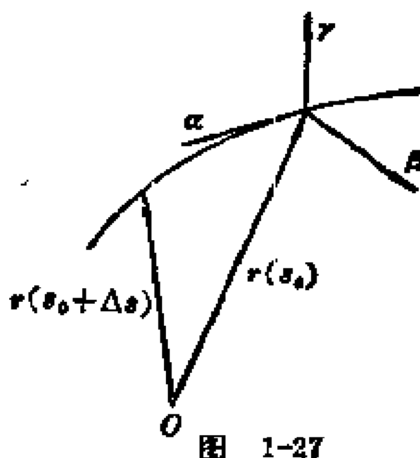


图 1-27

其中 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=0$.

由于

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\alpha}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=k\boldsymbol{\beta}$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}}=\dot{k}\boldsymbol{\beta}+k\dot{\boldsymbol{\beta}}=\dot{k}\boldsymbol{\beta}+k(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})=-k^2\boldsymbol{\alpha}+\dot{k}\boldsymbol{\beta}+k\tau\boldsymbol{\gamma}$$

所以

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)$$

$$=\boldsymbol{\alpha}_0\Delta s+\frac{1}{2}k_0\boldsymbol{\beta}_0(\Delta s)^2+\frac{1}{6}(-k_0^2\boldsymbol{\alpha}_0+\dot{k}_0\boldsymbol{\beta}_0+k_0\tau_0\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\varepsilon})(\Delta s)^3$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_1\boldsymbol{\alpha}_0+\varepsilon_2\boldsymbol{\beta}_0+\varepsilon_3\boldsymbol{\gamma}_0$, 而 $\boldsymbol{\alpha}_0$、$\boldsymbol{\beta}_0$、$\boldsymbol{\gamma}_0$、k_0、τ_0 等表示在点 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 的值.

由上式可得

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\left[\Delta s+\frac{1}{6}(-k_0^2+\varepsilon_1)(\Delta s)^3\right]\boldsymbol{\alpha}_0$$

$$+\left[\frac{1}{2}k_0(\Delta s)^2+\frac{1}{6}(\dot{k}_0+\varepsilon_2)(\Delta s)^3\right]\boldsymbol{\beta}_0+\left[\frac{1}{6}(k_0\tau_0+\varepsilon_3)\right](\Delta s)^3\boldsymbol{\gamma}_0$$

如果在 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\gamma}_0$ 的每一个分量中只取第一项则有

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\Delta s\boldsymbol{\alpha}_0+\frac{1}{2}k_0(\Delta s)^2\boldsymbol{\beta}_0+\frac{1}{6}k_0\tau_0(\Delta s)^3\boldsymbol{\gamma}_0$$

现在取[$\boldsymbol{r}(s_0)$; $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\gamma}_0$]为新坐标系, 并取 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 为计算弧长的始点, 则有 $s_0=0, \Delta s=s$. 如果 ξ, η, ζ 为曲线上点 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 的邻近点的新坐标, 则有

$$\begin{cases}\xi = s \\ \eta = \dfrac{1}{2}k_0 s^2 \\ \zeta = \dfrac{1}{6}k_0\tau_0 s^3\end{cases} \tag{1.22}$$

它可以看作在 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 点邻近，曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的近似方程. 由此看出，曲线在某点的曲率和挠率完全决定了曲线在该点邻近的近似形状.

下面我们通过曲线(1.22)在基本三棱形的三个平面上的投影来观察曲线在一点邻近的形状.

近似曲线在法平面 $\xi=0$ 上的投影是

$$(\xi=0), \quad \eta=\frac{1}{2}k_0 s^2, \ \zeta=\frac{1}{6}k_0\tau_0 s^3$$

消去参数 s 后有

$$(\xi=0) \qquad \zeta^2=\frac{2\tau_0^2}{9k_0}\eta^3$$

它是半立方抛物线(图 1-28).

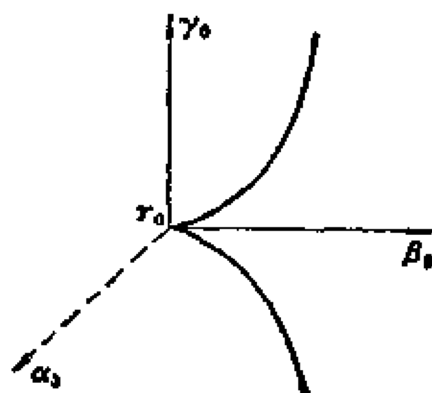


图 1-28

曲线在从切平面 $\eta=0$ 上的投影是

$$(\eta=0), \quad \xi=s, \quad \zeta=\frac{1}{6}k_0\tau_0 s^3$$

消去参数 s 后，有

$$(\eta=0), \qquad \zeta=\frac{1}{6}k_0\tau_0\xi^3$$

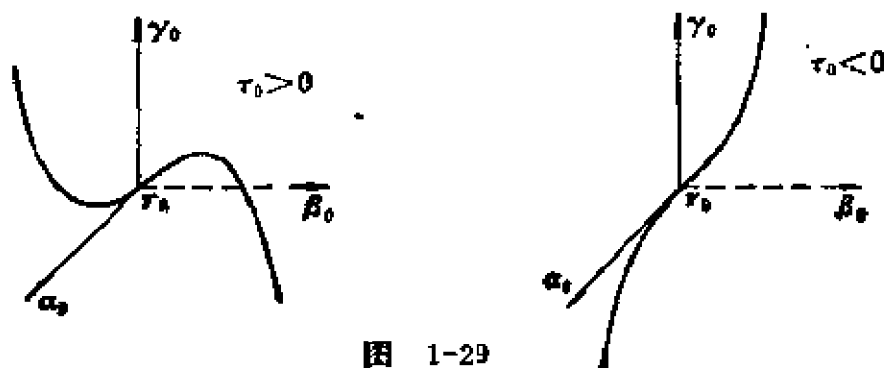


图 1-29

它是立方抛物线(图 1-29).

曲线在密切平面 $\zeta=0$ 上的投影是

$$(\zeta=0),\quad \eta=\frac{1}{2}k_0\xi^2$$

它是抛物线(图 1-30).

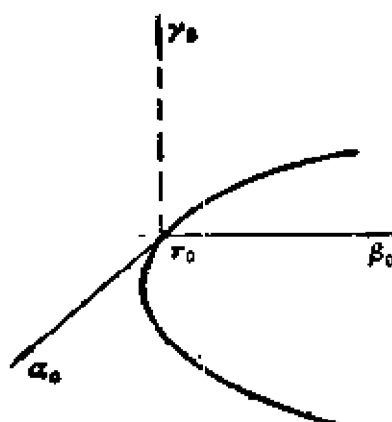
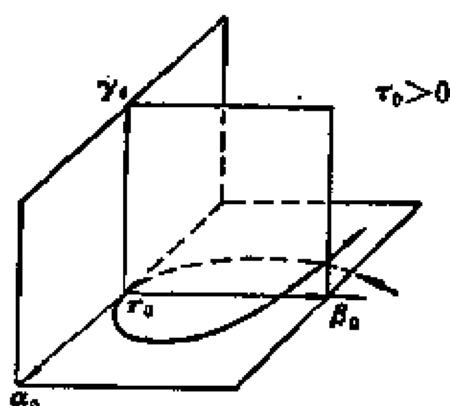


图 1-30

通过画出以上三个投影的立体图形就可以看出空间曲线在一点邻近的近似形状(图 1-31).



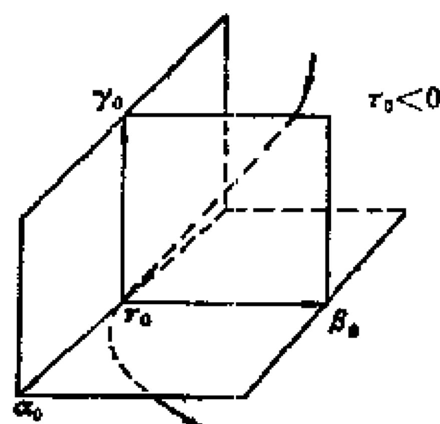


图 1-31

从以上分析可以看出:

1° 曲线穿过法平面和密切平面,但不穿过从切平面.

2° 主法向量 β_0 总是指向曲线凹入的方向,这是主法向量正向的几何意义.

3° 挠率的符号对曲线的影响如下:

$\tau_0>0$			
s	ξ	η	ζ
−	−	+	−
+	+	+	+

$\tau_0<0$			
s	ξ	η	ζ
−	−	+	+
+	+	+	−

(见图 1-31左)曲线由下往上成右旋曲线.(见图 1-31右)曲线由上往下成左旋曲线.

4.5 空间曲线论的基本定理

曲线的每一点都有确定的曲率和挠率，如果以弧长为参数，则有 $k=k(s)$，$\tau=\tau(s)$. 这两个关系式只与曲线本身有关，而与曲线的刚体运动及空间坐标变换无关. 我们把 $k=k(s)$，$\tau=\tau(s)$ 称为空间曲线的**自然方程**.

在上一小节里已经说明了空间曲线的形状局部地大体上由曲线的曲率和挠率所确定. 下面我们将证明，曲线的自然方程局部上完全确定了曲线.

空间曲线论的基本定理 给出闭区间$[s_0, s_1]$上的两个连续函数 $\varphi(s)>0$、$\psi(s)$，则除了空间的位置差别外，唯一地存在一条空间曲线，使得参数 s 是曲线的自然参数，并且 $\varphi(s)$和 $\psi(s)$ 分别为曲线的曲率和挠率，即曲线的自然方程为 $k=\varphi(s)$，$\tau=\psi(s)$.

为了确定曲线的位置，设 $s=s_0$ 时，曲线对应空间 P_0 点(即 $\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{r}_0$)，并且在该点的基本向量为给定的两两正交的右手系的单位向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$、$\boldsymbol{\beta}_0$、$\boldsymbol{\gamma}_0$.

证明 i) 以 $\varphi(s)$和 $\psi(s)$ 为系数建立一个微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{\alpha}\\ \dfrac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}=\varphi(s)\boldsymbol{\beta}\\ \dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=-\varphi(s)\boldsymbol{\alpha}+\psi(s)\boldsymbol{\gamma}\\ \dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}=-\psi(s)\boldsymbol{\beta}\end{cases}\tag{1.23}$$

根据微分方程组解的存在定理，此方程组对于初始条件 $s=s_0$ 时 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0$，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0$ 有唯一组解:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\quad \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(s),\quad \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(s),\quad \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}(s)$$

这是以 $\boldsymbol{r}_0$ 为端点的曲线.

ii) 再作微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})=2\boldsymbol{\alpha}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})=2\boldsymbol{\beta}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})=2\boldsymbol{\gamma}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})=\dfrac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma})=\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha})=\dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\end{cases}$$

利用(1.23)，则上述微分方程组可成为

$$\begin{cases}\dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})=2\varphi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})=-2\varphi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}+2\psi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})=-2\psi(s)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\beta}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})=\varphi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}-\varphi(s)\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\psi(s)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma})=\psi(s)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}-\varphi(s)\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}-\psi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha})=\varphi(s)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\beta}-\psi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}\end{cases}\tag{1.24}$$

由已知条件 1) $\varphi(s)$, $\psi(s)$ 在$[s_0, s_1]$连续.

2) $s=s_0$ 时 $\boldsymbol{\alpha}_0$、$\boldsymbol{\beta}_0$、$\boldsymbol{\gamma}_0$ 是两两正交的右手系的单位向量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\boldsymbol{\alpha}_0=1,\quad \boldsymbol{\beta}_0\cdot\boldsymbol{\beta}_0=1,\quad \boldsymbol{\gamma}_0\cdot\boldsymbol{\gamma}_0=1$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\boldsymbol{\beta}_0=0,\quad \boldsymbol{\beta}_0\cdot\boldsymbol{\gamma}_0=0,\quad \boldsymbol{\gamma}_0\cdot\boldsymbol{\alpha}_0=0$$

$$\alpha_0\times\beta_0\cdot\gamma_0=+1$$

根据微分方程组解的存在定理，存在唯一的一组解．但是当

$$\begin{aligned}&\alpha\cdot\alpha=1,\ \beta\cdot\beta=1,\gamma\cdot\gamma=1\\&\alpha\cdot\beta=0,\ \beta\cdot\gamma=0,\ \gamma\cdot\alpha=0\end{aligned}\tag{1.25}$$

时方程组(1.24)被满足，所以它是(1.24)的一组解．

由上述(1.25)可知α、β、γ是两两正交的单位向量．于是有

$$(\alpha,\beta,\gamma)=\pm1$$

但是混合积(α,β,γ)是s的连续函数，由于当$s=s_0$时它等于$+1$，所以对于所有的s都为$+1$，即α,β,γ成右手系。

由此得出α,β,γ是两两正交的构成右手系的单位向量．

iii) 由于已得出$\alpha(s)$，把(1.23)中的第一个式子两端积分，利用初始条件$r(s_0)=r_0$，即得曲线的方程

$$r=r_0+\int_{s_0}^{s}\alpha(s)ds\tag{1.26}$$

iv) 因为$|\dot{r}|=|\alpha(s)|=1$，所以弧长

$$\sigma=\int_{s_0}^{s}|\dot{r}|ds=\int_{s_0}^{s}ds=s-s_0$$

即$\sigma=s-s_0$．若取$s_0=0$，则得$\sigma=s$，这就是说s为曲线的自然参数．

v) 由$\dfrac{dr}{ds}=\alpha$可知$\alpha(s)$为曲线的切向量．再由$k=|\dot{\alpha}|=|\varphi(s)\beta|=\varphi(s)$，可得$\varphi(s)$为曲线的曲率．由(1.23)中的第二式可知$\beta(s)$是所求曲线的主法向量．再根据ii)，$\gamma(s)$是曲线的副法向量．所以$\alpha(s)$，$\beta(s)$，$\gamma(s)$是曲线的基本向量．

vi) 曲线的挠率为

$$\tau=\frac{(\dot{r},\ddot{r},\dddot{r})}{k^2}=\frac{(\alpha,\varphi(s)\beta,\dot{\varphi}(s)\beta+\varphi(s)\dot{\beta})}{k^2}$$

$$=\frac{(\alpha, \varphi(s)\beta, \dot{\varphi}(s)\beta+(-\varphi^2(s)\alpha+\varphi(s)\psi(s)\gamma))}{k^2}$$

$$=\frac{\varphi^2(s)\psi(s)(\alpha, \beta, \gamma)}{k^2}$$

$$=\psi(s)$$

由以上可见，由方程(1.26)所确定的曲线是以 s 为自然参数，$\varphi(s)$ 为曲率，$\psi(s)$ 为挠率的曲线.

vii) 根据 iii)和 i)可知 $s=s_0$ 时 $r=r_0$, 而且基本向量是 α_0, β_0, γ_0, 对于不同的初始条件，所得曲线仅位置不同，但是经过一个运动它们就完全重合.

根据上述定理，曲线除了在空间中的位置外，由它的自然方程

$$k=k(s), \qquad \tau=\tau(s)$$

唯一地确定.

习　题

1　求圆柱螺线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 在任意点的密切平面的方程.

2　求曲线 $x=t\sin t$, $y=t\cos t$, $z=te^t$ 在原点的密切平面、法平面、从切平面、切线、主法线、副法线方程.

3　证明圆柱螺线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 的主法线和 z 轴垂直相交.

4　在曲线 $x=\cos\alpha\cos t$, $y=\cos\alpha\sin t$, $z=t\sin\alpha$ 的副法线的正向取单位长，求其端点组成的新曲线的密切平面.

5　求以下曲线的曲率和挠率:

1) $r=\{a\cosh t, a\sinh t, at\}$

2) $r=\{a(3t-t^3), 3at^2, a(3t+t^3)\}$　$(a>0)$

6　曲线 $r=\{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$, 求: 1) 基本向量 α, β, γ, 2) 曲率和挠率, 3) 验证伏雷内公式.

7　证明如果曲线的所有切线都经过一个定点，则此曲线是直线.

8　证明: 如果曲线的所有密切平面都经过一个定点，则此曲线是平面

曲线.

9　证明曲线 $x=1+3t+2t^2, y=2-2t+5t^2, z=1-t^2$ 为平面曲线，并求出它所在的平面方程.

10　设在两条曲线 Γ、$\bar{\Gamma}$ 的点之间建立了一一对应关系，使它们在对应点的切线平行. 证明它们在对应点的主法线以及副法线也分别平行.

11　曲线 $\boldsymbol{r}=\left\{a(t-\sin t), a(1-\cos t), 4a\cos\frac{t}{2}\right\}$ 在哪些点的曲率半径最大?

12　已知曲线 $(C)\in C^3$: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 上一点 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 的邻近一点 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$，求 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$ 点到 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 点的密切平面、法平面、从切平面的距离(设 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 点的曲率、挠率分别为 k_0、τ_0).

§5　特殊曲线

5.1　平面曲线

平面曲线的理论是空间曲线理论的特殊情况. 根据§3曲线的概念，我们知道平面曲线是开的直线段到平面内的一一的，双方连续的，在上映射的象. 在直线段上引入坐标 $t(a<t<b)$，在平面上引入笛卡儿直角坐标 (x, y)，则平面曲线的参数表示(方程)是

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\qquad(a<t<b)$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)\qquad(a<t<b)$$

由§3的命题，平面曲线在正常点的充分小的邻域里可由

$$y=f(x)\quad\text{或}\quad x=g(y)\qquad(1.27)$$

表示.

在解析几何学里，我们也曾学到平面曲线的隐式方程由

$$F(x, y)=0$$

表示.

由隐函数的存在定理推出，如果在曲线上的点 (x_0, y_0) 满足条

件

$$F_x(x_0, y_0) \neq 0 \quad 或 \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

则在这点的一邻域内，曲线可由方程(1.27)中的一种来表示.

如果选取自然参数 s，即

$$s = \int_a^t |r'(t)| dt = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

则平面曲线的方程为

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

或

$$r = r(s)$$

(1) 平面曲线的伏雷内标架

给出 C^2 类的平面曲线(C)：

$$r = r(t)$$

我们在§3已经知道，过曲线上的每一点(正常点)都有切向量 $r'(t)$. 如果我们选取自然参数 s，则 $\dot{r}(s) = \dfrac{dr}{ds}$表示曲线 $r = r(s)$ 的单位切向量. 即

$$\alpha = \dot{r} = \frac{dr}{ds}$$

由于 α 是单位切向量，即$|\alpha| = 1$，根据§2的命题有

$$\dot{\alpha} \perp \alpha$$

也就是有

$$\ddot{r} \perp \dot{r}$$

这就是说向量$\dot{\alpha}$(即向量 $\ddot{r}$)是曲线的法线上的一个向量，我们再在 $\dot{\alpha}$ 上取单位向量：

$$\beta = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|} = \frac{\ddot{r}}{|\ddot{r}|} \tag{1.28}$$

则向量 β 称为平面曲线的**法向量**. 这样，过平面曲线上的每一个给定点 P, 都有切向量 α 和法向量 β(图 1-32), α 和 β 这两个正交的单位向量称为平面曲线在 P 点的**伏雷内标架**. α 和 β 也称为平面曲线的**基本向量**.

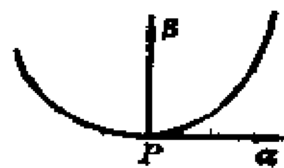


图 1-32

在这里需要注意的是平面曲线的基本向量的方向. 在§3里我们已经说明切向量 α 的正向与曲线的参数的增值方向是一致的. 法向量 β 的方向则由(1.28)式可以看出与 $\dot{\alpha}$ 的方向相同，而向量 $\dot{\alpha}$ 是由下式确定

$$\dot{\alpha}=\frac{d\alpha}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\alpha(s+\Delta s)-\alpha(s)}{\Delta s}$$

因而不论平面曲线在 P 点处是属于图 1-33 中的那种情形，向量 $\dot{\alpha}$ 总是指向曲线凹入的一方，且垂直于 α. 由此得知法向量 β 也总是指向曲线凹入的一方，且垂直于 α.

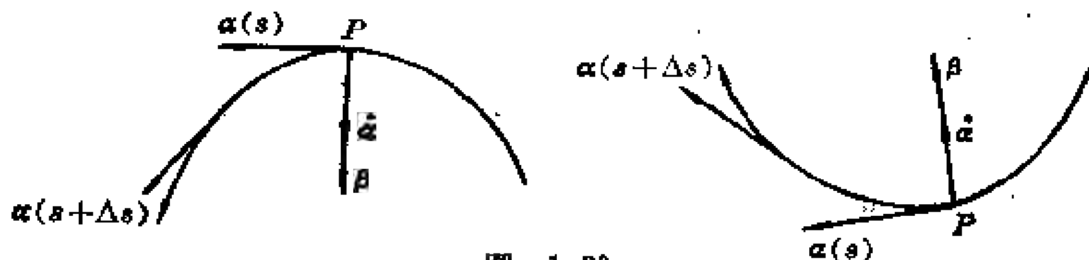


图 1-33

这样，平面曲线的伏雷内标架有两种情况，一种是从 α 到 β 的角为 $+\frac{\pi}{2}$, 另一种是 $-\frac{\pi}{2}$(图 1-34).



图 1-34

(2) **平面曲线的曲率、曲率半径、曲率中心及曲率圆**

设 C^2 类的平面曲线 (C):

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

曲线(C)上一点P的自然参数为s，另一点Q的自然参数为$s+\Delta s$（假定$\Delta s>0$）．在P、Q两点各作曲线(C)的单位切向量$\boldsymbol{\alpha}(s)$和$\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$，这两个切向量间的夹角是$\Delta\varphi$（也就是如图1-35把点$Q$

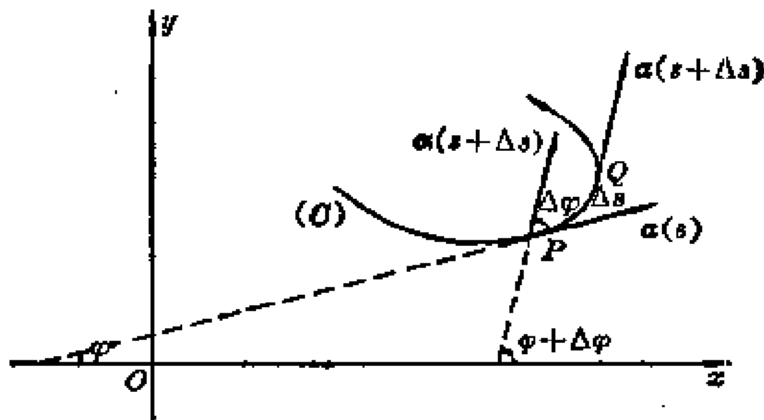


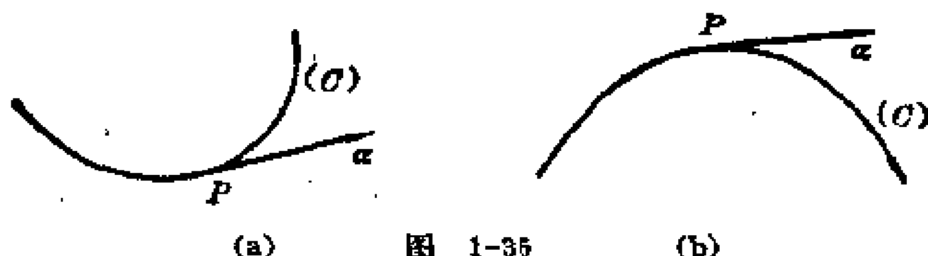
图 1-35

的切向量$\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$平移到点$P$后，两个向量$\boldsymbol{\alpha}(s)$和$\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$的夹角)，则$\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$叫做曲线弧$\widehat{PQ}$关于弧长$s$的**平均曲率**．由此引出平面曲线在点$P$的曲率的概念：当点$Q$沿着曲线趋近于点$P$（即$\Delta s\to 0$）时，若曲线弧$\widehat{PQ}$的平均曲率$\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$有极限，就称此极限值为**平面曲线在点$P$的曲率**．我们把平面曲线的曲率记做$k_r$，则有

$$k_r=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{d\varphi}{ds}$$

它刻划了曲线在一点处的弯曲程度．由以上看出这个弯曲程度是用平面曲线的切向量关于弧长的旋转速度来刻划的．当曲线在一点处的弯曲程度越大，切向量的旋转速度就越大．

需要说明的是上式所表示的平面曲线的曲率k_r的值是可正可负的．这是因为我们所取的$\Delta\varphi$为有向角，当$\boldsymbol{\alpha}(s)$到$\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$为逆时针时$\Delta\varphi$为正，反之$\Delta\varphi$为负．所以对于平面曲线的曲率$k_r$，在曲线向左转的地方有$k_r>0$（如图1-36(a)）；在曲线向右转的地方



(a)　　　　图 1-35　　　　(b)

有 $k_r<0$(如图 1-36(b)). 因而也把 k_r 称为平面曲线的**相对曲率**.

如果平面曲线上一点 P 的曲率 $k_r=0$, 则这种点称为**逗留点**(如图 1-37).

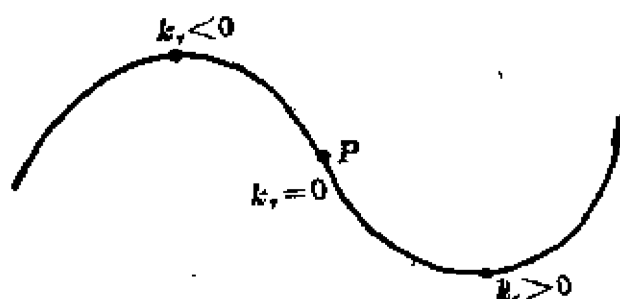


图 1-37

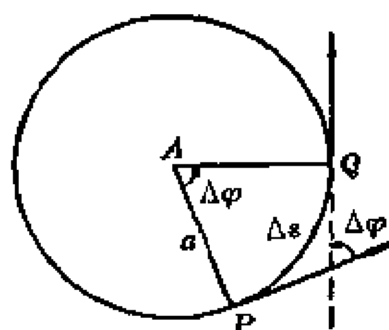


图 1-38

下面我们举例说明求平面曲线的曲率的最简单例子.

给出以 A 为圆心, a 为半径的圆(图 1-38), P、Q 为圆上两点, 它们之间的圆弧长为 Δs, 在点 P 与 Q 的切向量垂直于半径 AP 与 AQ. 因此, 半径 AP 与 AQ 之间的夹角 $\Delta\varphi$ 和在 P 与 Q 处的切向量之间的夹角相等. 圆心角 $\Delta\varphi$ 所对的弧 $\widehat{PQ}$ 的长度 $\Delta s=a\cdot\Delta\varphi$, 于是有

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{1}{a}$$

上式右边与 s 及 Δs 无关, 即与点 P、Q 的选取无关, 因而作为比值极限的圆弧的曲率, 在圆弧上的各个点都相等, 并等于

$$k_r=\frac{1}{a}$$

即圆的曲率等于它的半径的倒数.

如果P点到Q点按顺时针方向给出(图 1-39)，则得到圆的曲率为

$$k_r = -\frac{1}{a}$$

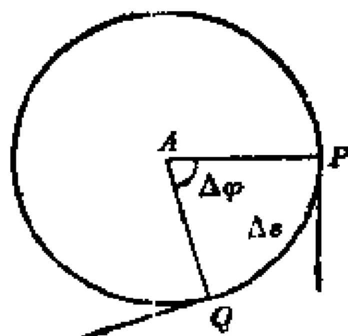


图 1-39

若我们只考虑平面曲线的弯曲大小而不考虑曲线回转的方向时，可以取相对曲率k_r的绝对值. 以后我们用k表示$|k_r|$，则有

$$k = |k_r| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

在§2命题7中我们曾指出: "一个单位变向量$r(t)$(即$|r(t)|=1$)的微商的模为$|r'(t)|$，它的几何意义是$r(t)$对于t的旋转速度$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$". 现在我们把这个结果应用到平面曲线的切向量$\alpha(s)$上去，则有

$$|\dot{\alpha}(s)| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

即

$$k = |k_r| = |\dot{\alpha}| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

由于

$$\dot{\alpha} = \ddot{r}$$

所以平面曲线的曲率的绝对值也可由下式表示

$$k = |k_r| = |\ddot{r}| \tag{1.29}$$

以下导出计算平面曲线的曲率公式.

由平面曲线的曲率的定义可以得到

$$k_r = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\varphi'}{s'} \tag{1.30}$$

其中

$$s'=\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2+y'^2}$$

现在只须求出 φ'，因为

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'}{x'}$$

因而

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}$$

所以有

$$\varphi'=\frac{1}{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}\cdot\frac{x'y''-x''y'}{x'^2}=\frac{x'y''-x''y'}{x'^2+y'^2}$$

把 s' 及 φ' 的值代入(1.30)中，则得由一般参数方程给出的平面曲线：$x=x(t)$, $y=y(t)$的曲率公式

$$k_r=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

如果曲线由方程 $y=f(x)$给出，即上式中令 $t=x$, 则平面曲线的曲率公式为

$$k_r=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

如果用自然参数时，平面曲线的方程为：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{e}_1+y(s)\boldsymbol{e}_2$$

则曲线的切向量为

$$\boldsymbol{\alpha}=\dot{x}\boldsymbol{e}_1+\dot{y}\boldsymbol{e}_2$$

设 φ 是曲线的切向量和 x 轴的夹角(图 1 35)，则有

$$\alpha=\cos\varphi e_1+\sin\varphi e_2$$

因而有

$$\dot{x}=\cos\varphi,\quad \dot{y}=\sin\varphi$$

于是

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=-\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}=-\dot{y}k_r\\ \ddot{y}&=\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}=\dot{x}k_r\end{aligned}\tag{1.31}$$

或

$$k_r=-\frac{\ddot{x}}{\dot{y}}=\frac{\ddot{y}}{\dot{x}}$$

由于 $\dot{x},\dot{y}$ 中至少有一个不为零，这两式至少有一个可用，用 $-\dot{y}$ 与 $\dot{x}$ 依次乘(1. 31)中两式后相加，则因 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$ 得

$$k_r=\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}\tag{1. 32}$$

这是自然参数给出的平面曲线的曲率公式.

例 求椭圆 $r=\{a\cos t, b\sin t\}$ $(a>b>0)$ 在点 $(a,0)$ 及点 $(0,b)$ 处的曲率(图 1-40).

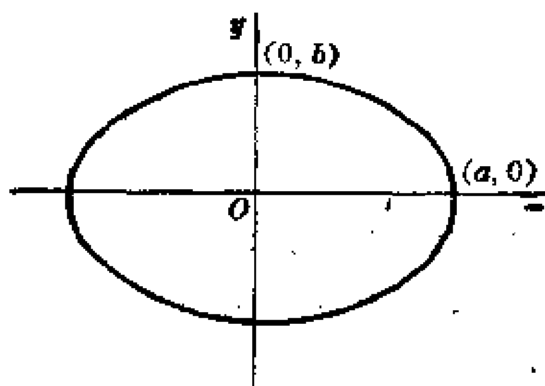


图 1-40

解 $r=\{a\cos t, b\sin t\}$

$r'=\{-a\sin t, b\cos t\}$

$r''=\{-a\cos t, -b\sin t\}$

代入平面曲线的曲率公式得

$$k_r=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=\frac{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

$$=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

在点$(a, 0)$，即对应于 $t=0$ 时，有

$$k_{r(t=0)}=\frac{a}{b^2}$$

在点$(0, b)$，即对应于 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$k_{r\left(t=\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{b}{a^2}$$

例 求抛物线 $y=x^2$(图 1-41)上任一点处的曲率。

解 $\frac{dy}{dx}=2x$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2.$$

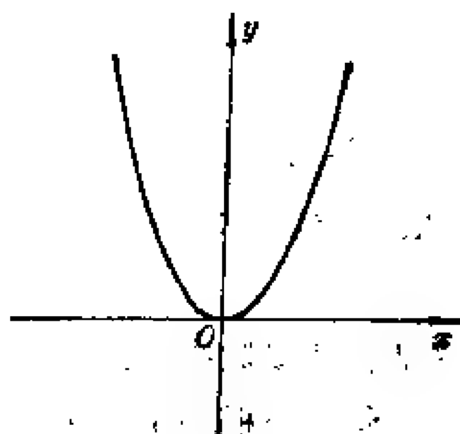


图 1-41

代入平面曲线的曲率公式得

$$k_r=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{2}{[1+4x^2]^{3/2}}$$

由上例的结果可以看出，在原点处，$y=x^2$ 的曲率 k_r 最大，随着曲线 $y=x^2$ 自原点处逐渐上升，k_r 的分母$[1+4x^2]^{3/2}$逐渐增大，因而曲率也就逐渐减小。

在一些问题的研究中，我们把平面曲线 (C) 上所考虑的 P 点邻近用这样的圆来代替，这个圆与曲线(C)在P点有相同的曲率，并且在P点与曲线(C)相切，而且它和曲线朝同一侧弯曲，这种圆称为曲线(C) 在 P 点的**曲率圆**. 它的中心称为**曲率中心**. **曲率圆**的半径称为**曲率半径**(图 1-42)。

由于曲线 (C) 在 P 点的曲率圆与曲线(C)相切，因而它们在 P 点有公共的切向量与法向量．显然曲率中心在 P 点的法线上（图 1-42）．

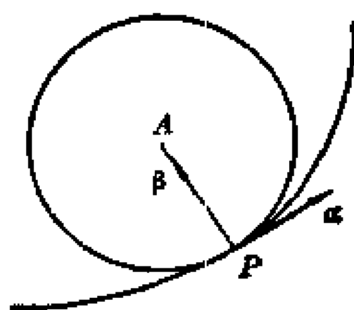


图 1-42

如果平面曲线在给定点 P 的曲率用 k_r 表示，则曲线在 P 点的曲率半径 R 为曲线在该点曲率的绝对值的倒数，即

$$R=\frac{1}{|k_r|}$$

(3) 平面曲线的伏雷内公式

在前面我们已介绍过平面曲线上的每一点处都有由切向量 α 和法向量 β 所构成的伏雷内标架．当研究平面曲线在任一点 P 的邻域里的性质时，我们可以选取 P 为原点，过 P 点的切线和法线为坐标轴，坐标轴的方向取 α 和 β 的方向的坐标系．这样的坐标系对于今后研究平面曲线有很大的方便．在这时候，切向量 α 和法向量 β 成为此坐标系的基向量(图 1-43)．

由于法向量 β 为

$$\beta=\frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|} \tag{1.33}$$



图 1-43

其中

$$|\dot{\alpha}|=|\ddot{r}|=|k_r|=k$$

所以由(1.33)得

$$\dot{\alpha}=k\beta \tag{1.34}$$

我们再讨论法向量 β 的微商 $\dot{\beta}$．

由于切向量 α 和法向量 β 是正交的，因此有

$$\alpha\cdot\beta=0$$

对弧长 s 微分这个等式，我们得到

$$\dot{\alpha}\cdot\beta+\alpha\cdot\dot{\beta}=0$$

利用(1.34)的结果，则有

$$\alpha\cdot\dot{\beta}=-\dot{\alpha}\cdot\beta=-k\beta\cdot\beta=-k \tag{1.35}$$

又由于法向量 β 是单位向量，根据§2的命题可知

$$\dot{\beta}\perp\beta$$

因为

$$\alpha\perp\beta$$

于是有

$$\dot{\beta}\parallel\alpha$$

即

$$\dot{\beta}=b\alpha \tag{1.36}$$

其中 b 为数量因子．上式两边点乘 α 得

$$\alpha\cdot\dot{\beta}=b \tag{1.37}$$

比较(1.35)与(1.37)得

$$b=-k$$

因此(1.36)为

$$\dot{\beta}=-k\alpha \tag{1.38}$$

公式(1.34)和(1.38)称为平面曲线的伏雷内公式，即

$$\begin{cases}\dot{\alpha}=k\beta\\ \dot{\beta}=-k\alpha\end{cases} \tag{1.39}$$

这是平面曲线论的基本公式．它的基本特点就是平面曲线的基本向量 α,β 关于弧长 s 的微商可由基本向量表示，其系数完全可由曲率所确定．

在这里我们需要进一步讨论的是：由于平面曲线的法向量 β 总是指向曲线的凹侧，因此如图 1-44 中平面曲线 (C) 上的 P_1 点和隔着逗留点 P_0 的 P_2 点，当 P_1、P_2 从曲线上不同方向趋于 P_0 时，

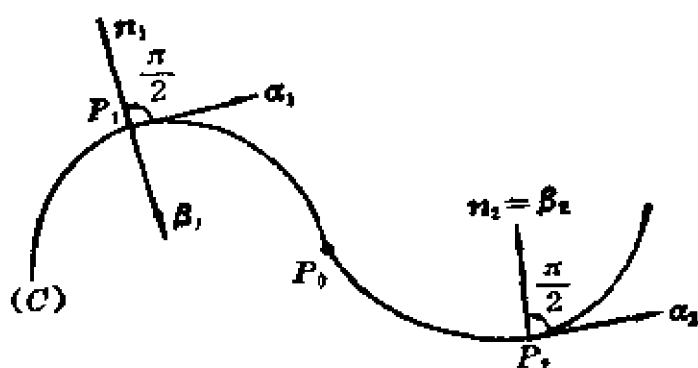


图 1-44

法向量的极限有不同的方向．这样，法向量函数 β 在逗留点是不连续的．为了避免这种不连续性，在曲线(C)的平面上，取法线上的单位向量 n，使切向量 α 到 n 的角是 $+\frac{\pi}{2}$(图 1-44)，而以 n 代替 β，显然 n 是连续的，而且

$$n=\pm\beta$$

上式符号的取法为：在曲线向左转的地方取正号；在曲线向右转的地方取负号．

由于平面曲线的曲率 k_r 的符号的取法与上述规定相一致，因此把上式代入到(1.39)中，则平面曲线论的基本公式也可以写成：

$$\begin{cases}\dot{\alpha}=k_r n\\ \dot{n}=-k_r\alpha\end{cases}\tag{1.40}$$

(4) 平面曲线在一点邻近的结构

我们在这里研究平面曲线在正常点邻近的形状．

在 C^3 类平面曲线 $r=r(s)$ 上取一点 $r(s_0)$，为了研究 $r(s_0)$点的邻近的形状，我们在它的邻近再取一点 $r(s_0+\Delta s)$(图1-45)，利用泰勒公式则有

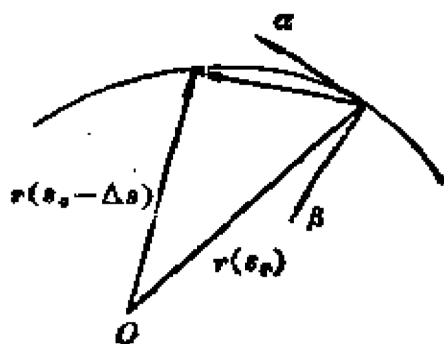


图 1-45

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\dot{\boldsymbol{r}}\Delta s+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(\Delta s)^2+\frac{1}{3!}(\dddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\varepsilon})(\Delta s)^3$$

其中 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}$。

根据伏雷内公式(1.39)有

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\alpha}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=k\boldsymbol{\beta}$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}}=\dot{k}\boldsymbol{\beta}+k\dot{\boldsymbol{\beta}}=\dot{k}\boldsymbol{\beta}+k(-k\boldsymbol{\alpha})=\dot{k}\boldsymbol{\beta}-k^2\boldsymbol{\alpha}$$

所以

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{\alpha}\Delta s+\frac{1}{2}k\boldsymbol{\beta}(\Delta s)^2+\frac{1}{6}(\dot{k}\boldsymbol{\beta}-k^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\varepsilon})\Delta s^3 \tag{1.41}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}=e_1\boldsymbol{\alpha}+e_2\boldsymbol{\beta}$. 整理(1.41)得

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\left[\Delta s+\frac{1}{6}(-k^2+e_1)(\Delta s)^3\right]\boldsymbol{\alpha}+\left[\frac{1}{2}k(\Delta s)^2+\frac{1}{6}(\dot{k}+e_2)(\Delta s)^3\right]\boldsymbol{\beta}$$

现在取 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 点为直角坐标系的原点，以该点的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为坐标系的基向量，若 x, y 为曲线上 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$ 点的新坐标，则在 $\boldsymbol{r}(s_0)$点邻近，曲线的近似方程：

$$\begin{cases}x=\Delta s-\dfrac{1}{6}k^2(\Delta s)^3\\ y=\dfrac{k}{2}(\Delta s)^2+\dfrac{1}{6}\dot{k}(\Delta s)^3\end{cases}$$

当 $k\neq 0$ 时，平面曲线在一点邻近的近似方程为：

$$\begin{cases}x=\Delta s\\ y=\dfrac{k}{2}(\Delta s)^2\end{cases}$$

即

$$y=\frac{k}{2}x^2$$

它是抛物线(图 1-46). 当 $k=0, \dot{k}\neq 0$ 时，平面曲线在一点邻近的近似方程为：

$$\begin{cases} x=\Delta s \\ y=\dfrac{1}{6}\dot{k}(\Delta s)^3 \end{cases}$$

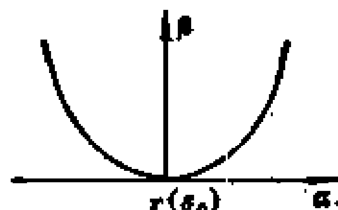


图 1-46

即

$$y=\frac{1}{6}\dot{k}x^3$$

它是三次抛物线(图 1-47).

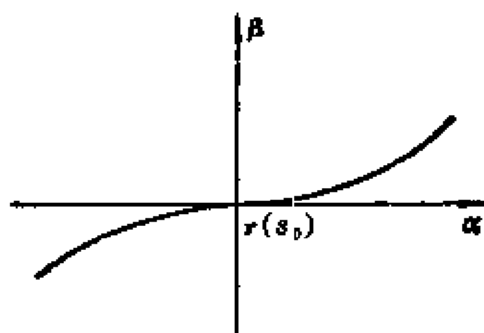


图 1-47

以上结果说明了平面曲线在一点邻近的形状近似地由它的曲率所确定.

(5) **平面曲线的渐缩线和渐伸线**

我们已经知道，平面曲线(C)在 P 点的曲率中心在曲线的法线上，与曲线的距离等于曲率半径. 现在提出这样一个问题：当 P 点在曲线(C)上变动时，它的曲率中心如何变化?

我们把平面曲线(C)的曲率中心的轨迹称为平面曲线(C)的**渐缩线**，记为(C^*). 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是平面曲线(C)的自然参数表示. 渐缩线的作法是对应于曲线(C)的每一个点 $P(s)$ 作法向量 $\boldsymbol{\beta}(s)$，在这法向量上量一长度等于曲线(C)在 $P(s)$ 点的曲率半径 $R(s)$，则端点 A 就是对应于 $P(s)$ 点的曲率中心，也就是渐缩线(C^*)上的对应点. 设 P 和 A 点的向径分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}^*$ (图 1-48)，则渐缩线

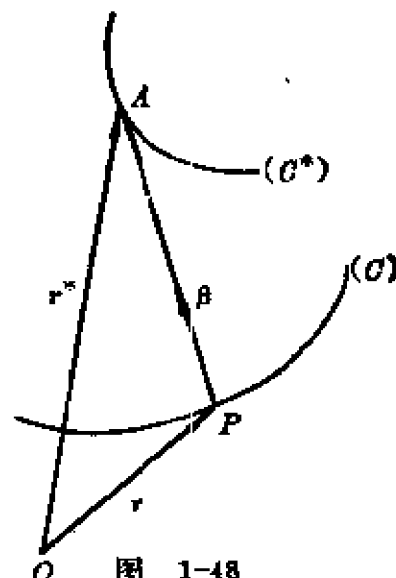


图 1-48

(C^*)的方程是

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+R(s)\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{|k_r(s)|}\boldsymbol{\beta}$$

根据平面曲线的伏雷内公式有:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{\alpha}}=|k_r(s)|\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{R(s)}\boldsymbol{\beta}$$

所以上述渐缩线(C^*)的方程又能写成

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+[R(s)]^2\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{[k_r(s)]^2}\ddot{\boldsymbol{r}}$$

即

$$\begin{cases} x^*=x(s)+[R(s)]^2\ddot{x}=x(s)+\dfrac{1}{[k_r(s)]^2}\ddot{x} \\ y^*=y(s)+[R(s)]^2\ddot{y}=y(s)+\dfrac{1}{[k_r(s)]^2}\ddot{y} \end{cases} \tag{1.42}$$

对于曲线(C)的一般参数表示

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

由于

$$[R(s)]^2=\frac{1}{[k_r(s)]^2}=\frac{(x'^2+y'^2)^3}{(x'y''-x''y')^2}$$

$$\dot{x}(s)=\frac{dx}{ds}=\frac{\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\ddot{x}(s)=\frac{\dfrac{d\dot{x}}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}=\frac{\left(\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\frac{y'(x''y'-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^2}$$

同理

$$\ddot{y}(s)=\frac{x'(x'y''-y'x'')}{(x'^2+y'^2)^2}$$

代入(1.42)中得到渐缩线的一般参数表示:

$$
\begin{cases}
x^* = x(t) - \dfrac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \\
y^* = y(t) + \dfrac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}
\end{cases} \tag{1.43}
$$

例 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的渐缩线.

解 椭圆的参数表示是

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t$$

因而得出

$$x' = -a\sin t,\quad y' = b\cos t$$

$$x'' = -a\cos t,\quad y'' = -b\sin t$$

代入渐缩线的公式(1.43)得

$$x^* = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$

$$y^* = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

即

$$a^{2/3}x^{*2/3} + b^{2/3}y^{*2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

或即

$$(ax^*)^{2/3} + (by^*)^{2/3} = c^{4/3}$$

$$(c^2 = a^2 - b^2)$$

为上述椭圆的渐缩线方程. 这曲线颇似星形线, 它由星形线沿铅垂方向拉长而得出(图 1-49).

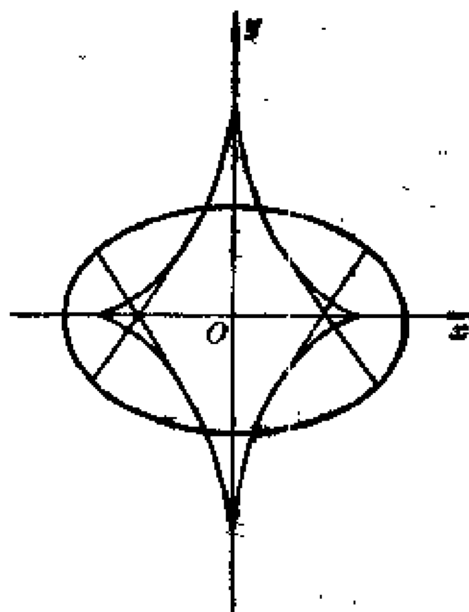


图 1-49

下面我们给出渐缩线的两个性质:

命题 1 平面曲线 (C) 的法线和它的渐缩线 (C^*) 在对应点相切.

换言之，渐缩线(C^*)是原曲线(C)的法线族的包络.

证明　平面曲线(C)的自然参数s不一定是渐缩线(C^*)的自然参数，我们把s看做(C^*)的一般参数.

由渐缩线(C^*)的方程

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + R(s)\boldsymbol{\beta}$$

得到曲线(C^*)的切方向是

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{r} + R(s)\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha} + \dot{R}(s)\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} = \dot{R}(s)\boldsymbol{\beta}$$

因此渐缩线(C^*)的切方向平行于原曲线(C)的法向量$\boldsymbol{\beta}$(图 1-50).

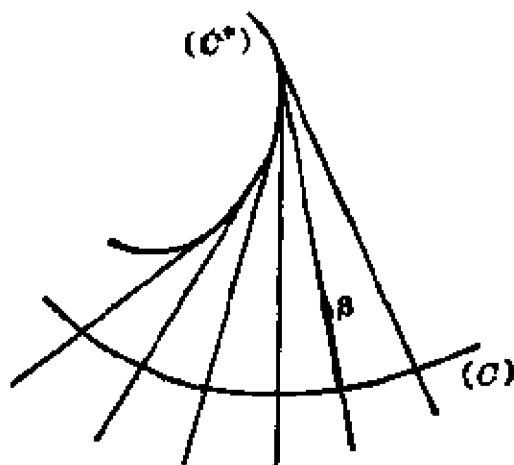


图　1-50

命题 2　平面曲线(C)上两点的曲率半径之差等于渐缩线上对应点之间的弧长.

证明　设平面曲线(C)的自然参数是s，它的渐缩线(C^*)的自然参数是s^*，则

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} = \frac{d\mathbf{r}^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \boldsymbol{\alpha}^*\frac{ds^*}{ds}$$

由命题 1 的结果知道有

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} = \dot{R}(s)\boldsymbol{\beta}$$

所以有

$$\frac{ds^*}{ds}\boldsymbol{\alpha}^* = \dot{R}(s)\boldsymbol{\beta}$$

由于$\boldsymbol{\alpha}^*$, $\boldsymbol{\beta}$都是单位向量，因而得到

$$\left|\frac{ds^*}{ds}\right| = |\dot{R}(s)| = \left|\frac{dR}{ds}\right|$$

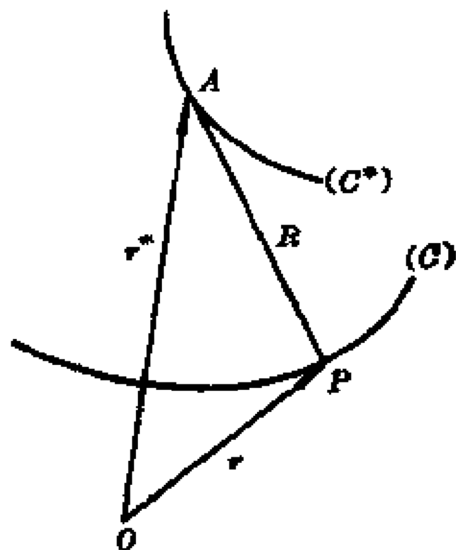


图　1-51

则有

$$|ds^*|=|dR|$$

即

$$ds^*=\pm dR$$

这样我们可以得到在渐缩线上对应于曲线弧 s_1s_2 的弧长为

$$s^*(s_1,s_2)=\pm\int_{s_1}^{s_2}dR=\pm[R(s_2)-R(s_1)]$$

注意：上式中正负号的取法是当 s^*随着 R 一同增大，则取正号(图 1-52)，相反的情形取负号(图 1-53)。

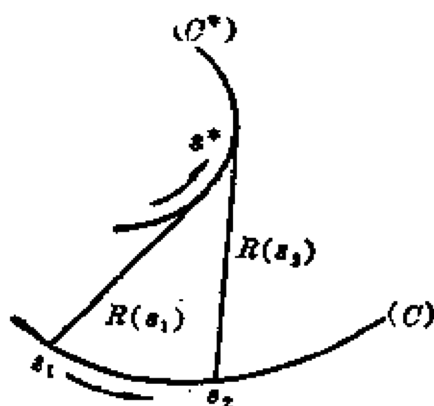


图 1-52

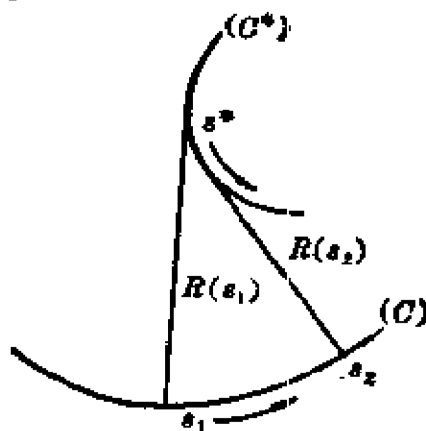


图 1-53

下面我们定义渐伸线：

如果曲线(C)是曲线(C^*)的渐缩线，则称(C^*)为曲线 (C)的一条渐伸线(图 1-54)。

设曲线 (C) 的自然参数表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则根据渐缩线的性质有

$$|\boldsymbol{r}^*(s)-\boldsymbol{r}(s)|=R^*(s)$$

$$|\boldsymbol{r}^*(s_0)-\boldsymbol{r}(s_0)|=R^*(s_0)$$

但是

$$R^*(s)-R^*(s_0)=s_0-s$$

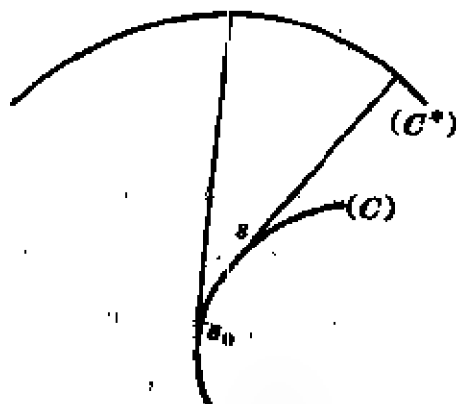


图 1-54

所以

$$\boldsymbol{r}^*(s)=\boldsymbol{r}(s)+R^*(s)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{r}(s)+[R^*(s_0)+s_0-s]\boldsymbol{\alpha}$$

因此，如果曲线(C)的渐伸线(C^*)存在的话，则(C^*)的方程为

$$r^*=r(s)+(c-s)\alpha$$

其中c为一个常数.

根据上面的讨论，渐伸线有一个简单的机械作图法：

设有一根软尺弯成的曲线A_0A(即曲线P_0P的渐缩线)，又有一根长度等于曲率半径R的绳子的一端固定在点A_0，紧贴在这根曲尺(即曲线A_0A)上，则绳子的另一端画出曲线P_0P，显然，这时绳子上任何一点各画出一条渐伸线(图 1-55).

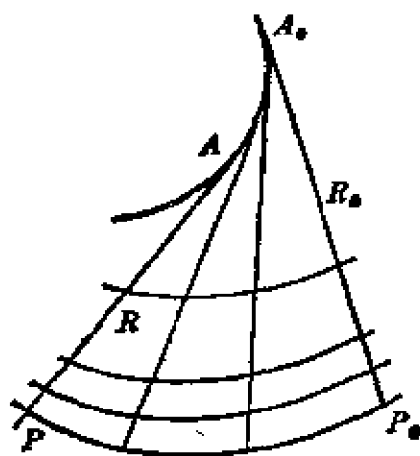


图 1-55

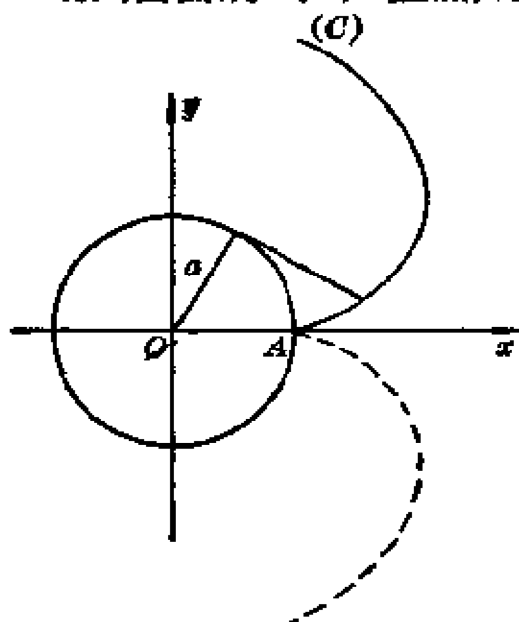


图 1-56

由此可以看出，给出曲线A_0A后，就有无数条渐伸线与它对应. 这些渐伸线有公共的法线，而且它们每两条之间的法线距离相等.

按照上述渐伸线的作法，我们可以作出圆的渐伸线. 在中心为O，半径为a的圆周上绕以细线，细线的末端在A点(图 1-56). 现在把这细线从圆周上揭起，但始终拉住它的末端使它伸直，这细线末端画出的曲线就是所给圆的渐伸线.

5.2 一般螺线

空间曲线论的基本定理指出，曲线的曲率和挠率完全决定了

曲线的形状．当曲线曲率和挠率之间满足各种不同的关系时，就会得到不同类型的曲线．例如，$k=0$ 时为直线，$\tau=0$ 时为平面曲线．在这部分我们对常见的曲线——一般螺线进行较为详细的讨论，这对于进一步了解曲线的理论是非常必要的．

我们在 § 3 中已介绍过圆柱螺线，它是在一张长方形的纸上画一条斜的直线，当纸卷在圆柱面上时则斜线卷成了圆柱螺线．如果把同样的纸卷在一个任意的柱面上，那么斜线卷成一般螺线（图 1-57）．从直观上可以看出一般螺线的切线和柱面的母线交于固定角．

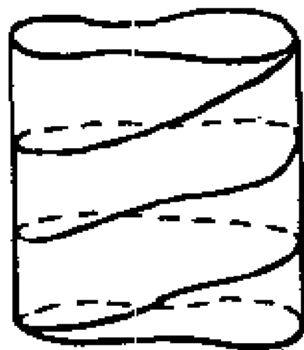


图 1-57

定义 切线和固定方向作固定角的曲线称为一般螺线．

一般螺线还有下面几个性质：

1° 主法线与一个固定方向垂直．

证明 设 $\boldsymbol{p}$ 是固定方向上的一个单位向量．根据一般螺线的定义，可知它的切向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 和 $\boldsymbol{p}$ 作固定角 ω，即

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}=\cos\omega$$

两边取微商得

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{p}=0$$

因此得

$$k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{p}=0$$

由于 $k\neq0$（我们假定除去直线的情况），可以得到

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{p}=0$$

2° 副法线与一个固定方向作固定角．

证明 由 1° 知 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 垂直，所以 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}$ 共面．又因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 垂直，且 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 作固定角，因此得出 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 也作固定角．

3° **曲率和挠率等于一个定比，即$\frac{k}{\tau}=$常数。**

证明 由1°的结论$\beta\cdot p=0$可得

$$\dot{\beta}\cdot p=0$$

因此有

$$(-k\alpha+\tau\gamma)\cdot p=0$$

即

$$-k\alpha\cdot p+\tau\gamma\cdot p=0$$

设α与p的夹角为ω(定角)，所以上式为

$$-k\cos\omega\pm\tau\sin\omega=0$$

即

$$\frac{k}{\tau}=\pm\operatorname{tg}\omega\quad(\text{常数})$$

可以证明以上1°、2°、3°的结论不但是必要的，而且也是充分的。在这里我们只证明3°的结论是充分的，其余留给读者证明。

如果

$$\frac{k}{\tau}=\text{常数}$$

作向量

$$\gamma+\frac{\tau}{k}\alpha$$

因为

$$\dot{\gamma}+\frac{\tau}{k}\dot{\alpha}=-\tau\beta+\tau\beta=0$$

所以向量$\gamma+\frac{\tau}{k}\alpha$是常向量，并且与$\alpha$作固定角。因此曲线是一般螺线。

以上性质1°，2°，3°可以看做一般螺线的等价定义。

最后，我们来求一般螺线的一种标准方程。

设柱面的母线平行于 z 轴，则可令 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}_3$，再设一般螺线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

则由

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}=\cos\omega$$

得到

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_3=\cos\omega$$

即

$$\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\cdot(0,0,1)=\cos\omega$$

因而有

$$\frac{dz}{ds}=\cos\omega$$

若令 $z=0$ 时 $s=0$，则

$$z=s\cos\omega$$

于是一般螺线的方程就成为

$$\boldsymbol{r}=\{x(s),\ y(s),\ s\cos\omega\}$$

其中 $x(s)$，$y(s)$ 为任意函数.

5.3 *贝特朗(Bertrand)曲线

如果曲线 (C) 与 $(\bar{C})$ 的点之间建立这样的一一对应关系，使得在对应点的主法线重合，则这两条曲线都称为贝特朗曲线. 而每一条称为另一条的侣线.

显然每一条平面曲线都是一条贝特朗曲线，因为它的主法线的每一条正交轨线都是它的侣线. 以下我们只讨论挠曲线.

现在我们求一条曲线为贝特朗曲线的条件.

设一条贝特朗曲线 (C) 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

其中 s 为(C)的自然参数.

又设$(\bar{C})$为(C)的侣线, $(\bar{C})$的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\bar{s})$$

其中 $\bar{s}$ 为$(\bar{C})$的自然参数.

由图 1-58 可知有

$$\bar{\boldsymbol{r}}(\bar{s})=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{\beta}(s)$$

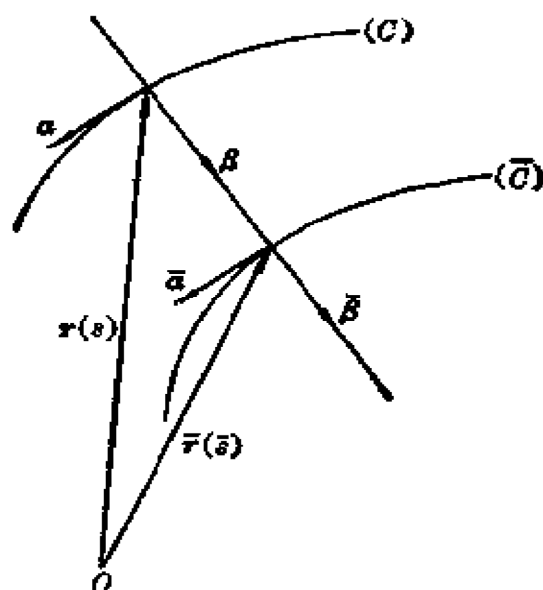


图 1-58

其中 $\lambda(s)$表示一对对应点之间的距离. 则有

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}=[\boldsymbol{\alpha}+\dot{\lambda}\boldsymbol{\beta}+\lambda(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})]\frac{ds}{d\bar{s}}$$

即

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=[(1-\lambda k)\boldsymbol{\alpha}+\dot{\lambda}\boldsymbol{\beta}+\lambda\tau\boldsymbol{\gamma}]\frac{ds}{d\bar{s}} \tag{1.44}$$

由于$\bar{\boldsymbol{\beta}}=\pm\boldsymbol{\beta}$, 所以曲线$(\bar{C})$的切向量 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$与 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直, 因而 (1.44)两边点乘 $\boldsymbol{\beta}$ 得

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\dot{\lambda}\frac{ds}{d\bar{s}}=0$$

但$\dfrac{ds}{d\bar{s}}\neq0$. 所以$\dot{\lambda}=0$, 即

$$\lambda = 常数$$

由于(C)与$(\bar{C})$是不同的曲线，故上式为不等于零的常数。

因而(1.44)为

$$\bar{\alpha} = [(1-\lambda k)\alpha + \lambda\tau\gamma]\frac{ds}{d\bar{s}} \tag{1.45}$$

现在设对应点的两切向量α、$\bar{\alpha}$之间的交角为θ（如图1-59），则有

$$\bar{\alpha} = \alpha\cos\theta + \gamma\sin\theta \tag{1.46}$$

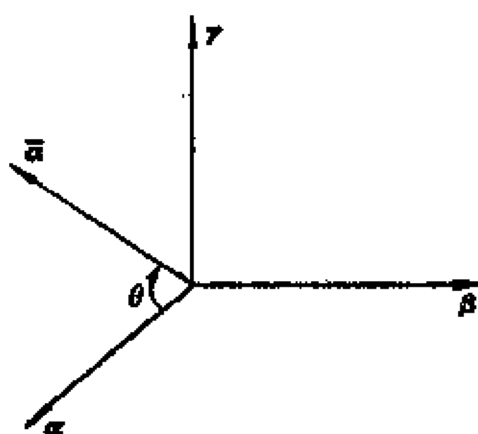


图 1-59

由于

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds} = \frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d\bar{s}}{ds}\bar{k}\bar{\beta}$$

所以(1.46)式关于s求微商得

$$\frac{d\bar{s}}{ds}\bar{k}\bar{\beta} = (k\cos\theta - \tau\sin\theta)\beta + (-\alpha\sin\theta + \gamma\cos\theta)\frac{d\theta}{ds}$$

但$\bar{\beta}$与β平行，而右式第二部分与β垂直，所以这部分为零。又由于$-\alpha\sin\theta+\gamma\cos\theta$是一个单位向量，故$\frac{d\theta}{ds}=0$，即

$$\theta = 常数$$

从(1.45)和(1.46)，因为α、γ垂直，则得

$$(1-\lambda k)\frac{ds}{d\bar{s}} = \cos\theta$$

$$\lambda\tau\frac{ds}{d\bar{s}} = \sin\theta$$

消去$\frac{ds}{d\bar{s}}$即得

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda k & \cos\theta \\ \lambda\tau & \sin\theta \end{vmatrix} = 0$$

即

$$k\sin\theta+\tau\cos\theta=\frac{\sin\theta}{\lambda} \tag{1.47}$$

其中 $\lambda\neq 0$. 此外 $\sin\theta\neq 0$, 否则 $\tau=0$, 这与假定我们只讨论挠曲线不符.

于是(1.47)又可写为:

$$\lambda k+\mu\tau=1 \tag{1.48}$$

其中 λ,μ 都是常数, $\mu=\lambda\operatorname{ctg}\theta$.

(1.48)为曲线是贝特朗曲线的必要条件. 以下证明它也是贝特朗曲线的充分条件.

假设一条曲线(C)的曲率 k 和挠率 τ 满足条件(1.48), 其中 $\lambda\neq 0$, 以$\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$除(1.48)的两边, 就可把它写为(1.47)的形式, 其中 $\sin\theta=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\neq 0$. 我们要证明, 从曲线$(C)$及常数$\lambda$代进方程

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{\beta}(s)$$

所得到的曲线$(\bar{C})$是(C)的一条贝特朗侣线. 因为λ是一个常数, 由上式可以直接得到(1.45). 利用(1.48), 公式(1.45)又可改写为

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\lambda\tau}{\sin\theta}(\boldsymbol{\alpha}\cos\theta+\boldsymbol{\gamma}\sin\theta)\frac{ds}{d\bar{s}}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}\cos\theta+\boldsymbol{\gamma}\sin\theta$ 是一个单位向量, 所以

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\pm(\boldsymbol{\alpha}\cos\theta+\boldsymbol{\gamma}\sin\theta)$$

从此得到

$$\bar{k}\bar{\boldsymbol{\beta}}=\frac{d\bar{\boldsymbol{\alpha}}}{d\bar{s}}=\pm(k\cos\theta-\tau\sin\theta)\boldsymbol{\beta}\frac{ds}{d\bar{s}}$$

由此可见 $\bar{\boldsymbol{\beta}}\parallel\boldsymbol{\beta}$. 由于$(\bar{C})$的点在$(C)$的主法线上, 因而$(C)$, $(\bar{C})$的主法线重合, 所以都是贝特朗曲线.

由此得出: 一条空间曲线是贝特朗曲线的充要条件是它的曲

率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 满足 $\lambda k+\mu\tau=1$，其中 λ,μ 为常数，而且 $\lambda\neq 0$.

两条贝特朗侣线间沿它们公共主法线的距离是固定的，而且它们对应点的切线作固定角.

一般来说一条贝特朗曲线只有一条侣线，如果有两条，且分别对应 λ_1,λ_2，此时有

$$\begin{cases}\lambda_1 k+\mu_1\tau=1\\ \lambda_2 k+\mu_2\tau=1\end{cases}$$

这里 $\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_2 & \mu_2\end{vmatrix}\neq 0$，否则两式不相容．解这个线性方程组得 $k=$ 常数，$\tau=$ 常数．这时曲线是圆柱螺线.

除圆柱螺线外每一条贝特朗曲线只有一条唯一的侣线，圆柱螺线有无数多条侣线.

习　题

1　求以下平面曲线的相对曲率 k_r 和曲率半径 R (假定弧长增加的方向就是参数增加的方向):

双曲线　$\boldsymbol{r}=\{a\cosh t,\ b\sinh t\}$

旋轮线　$\boldsymbol{r}=a\{t-\sin t,\ 1-\cos t\}$

2　求旋轮线 $\boldsymbol{r}=a\{t-\sin t, 1-\cos t\}$ 的渐缩线.

3　证明曳物线 $x=-a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)$, $y=a\sin t$ 的渐缩线是悬链线.

4　求抛物线 $y^2=2px$ 的渐缩线.

5　证明：如果所有密切平面垂直于某个固定直线，那么它是平面曲线.

6　证明：如果所有的法平面包含固定向量 $\boldsymbol{e}$，那么这曲线是直线或平面曲线.

7　如果两条曲线在对应点有公共的副法线，则它们是平面曲线.

8　如果曲线 Γ：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为一般螺线，α,β 为 Γ 的切线向量和主法向量，R 为 Γ 的曲率半径，证明 $\overline{\Gamma}$：$\bar{\boldsymbol{r}}(s)=R\alpha-\int\beta ds$ 也是一般螺线.

9　证明一条曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为一般螺线的充要条件是 $(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})=0$.

10 证明一条曲线的所有切线不可能同时都是另一条曲线的切线.

11 证明一条挠曲线的所有副法线不可能同时都是另一条曲线的副法线.

12 设在两条曲线(C)、$(\bar{C})$的点之间建立了一一对应关系,使它们在对应点的切线平行. 证明它们在对应点的主法线以及副法线也分别平行,而且它们的挠率和曲率都成比例, 因此如果(C)是一般螺线, $(\bar{C})$也是一般螺线.

第二章 曲面论

§1 曲面的概念

1.1 简单曲面及其参数表示

平面上不自交的闭曲线称为约尔当 (Jordan) 曲线. 约尔当曲线分平面为两部分, 并且每一部分都以此曲线为边界, 它们中间一个是有限的, 另一个是无限的, 其中有限的区域称为**初等区域**. 换言之, 初等区域是约尔当曲线的内部. 例如, 正方形或矩形的内部, 圆或椭圆的内部等都是初等区域.

如果平面上初等区域到三维欧氏空间内建立的对应是一一的, 双方连续的在上映射, 则我们把三维欧氏空间中的象称为**简单曲面**.

实例: 一矩形纸片(初等区域), 可以卷成带有裂缝的圆柱面或圆环面.

整个平面也是一个初等区域, 经过球极投影可以映成挖掉北极的球面.

我们假定以后所讨论的曲面都是简单曲面. 不另作声明.

根据上述曲面的概念. 我们可以建立曲面的方程.

给出平面上一初等区域 G, G 中的点的笛卡儿坐标是(u, v), G经过上述映射 f 后的象是曲面 S. 对于空间的笛卡儿坐标系来说, S 上的点的坐标是(x, y, z), 这样我们可以具体写出 f 的解析表达式:

$$x=f_1(u, v), y=f_2(u, v), z=f_3(u, v) \qquad (u, v)\in G \quad (2.1)$$

(2.1)称为**曲面 S 的参数表示或参数方程**. u 和 v 称为**曲面 S 的参**

数或曲纹坐标。

习惯上，我们常把(2.1)中的函数关系符号 f_1、f_2 和 f_3 分别写成 x、y 和 z，即把(2.1)写成

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)\qquad (u,v)\in G\qquad (2.1)'$$

我们有时也把曲面的参数方程简写成向量函数的形式：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)\qquad (u,v)\in G\qquad (2.2)$$

实例：

i) 圆柱面：G 是长方形，$u=\theta$，$v=z$，$0<\theta<2\pi$，$-\infty<z<+\infty$（如图 2-1）

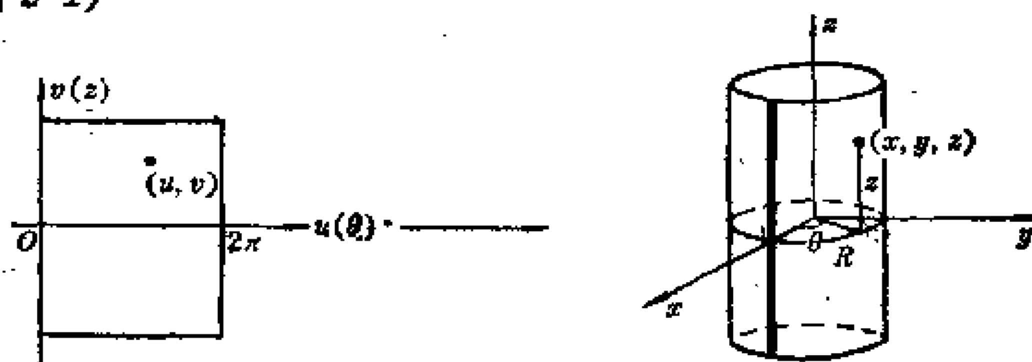


图 2-1

圆柱面的参数方程为

$$x=R\cos\theta,\quad y=R\sin\theta,\quad z=z$$

其中 R 为截圆的半径.

ii) 球面：G 是长方形，$u=\varphi$（经度），$v=\theta$（纬度），$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\varphi<2\pi$（如图 2-2）

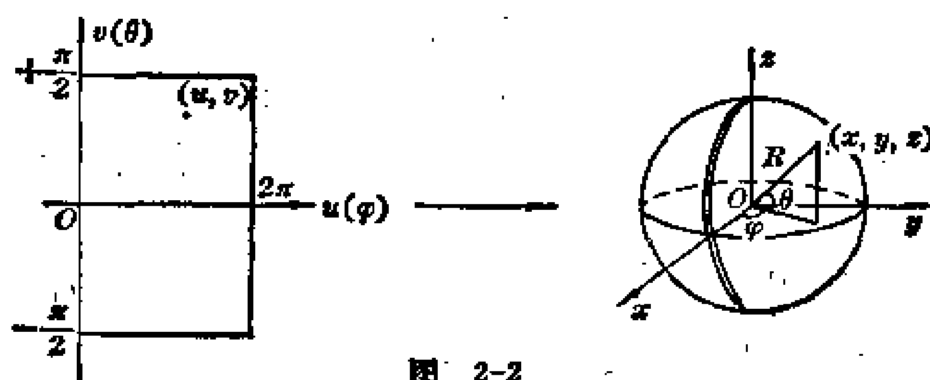


图 2-2

球面的参数方程为

$$x=R\cos\theta\cos\varphi,\ y=R\cos\theta\sin\varphi,\ z=R\sin\theta$$

其中 R 是球面的半径.

iii) **旋转面**: 考虑 xOz 平面上的一曲线 (C):

$$x=\varphi(t)>0,\ z=\psi(t)\qquad -\infty<t<+\infty$$

把此曲线绕 z 轴旋转, 则得一曲面, 称为**旋转面**. 它的 G 是一长方形, $u=\theta, v=t, 0<\theta<2\pi, -\infty<t<+\infty$ (如图 2-3)

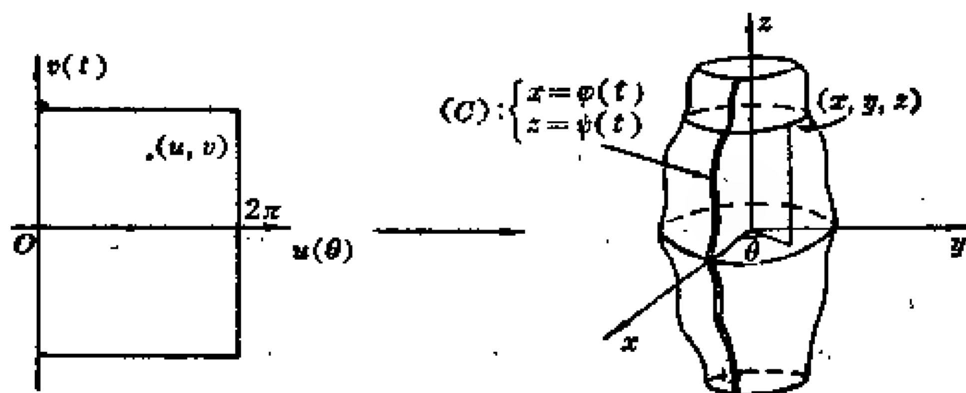


图 2-3

旋转面的参数方程为

$$x=\varphi(t)\cos\theta,\ y=\varphi(t)\sin\theta,\ z=\psi(t)$$

上面介绍的 (2.1)′ 或 (2.2) 中的参数 u, v 就是曲面的曲纹坐标. 直观来说, 我们把曲面上的点在上述映射 f 下的原象(G 中的点)的坐标定义为曲面上点的曲纹坐标.

初等区域 G 所在平面上的坐标直线 $v=$ 常数或 $u=$ 常数在曲面上的象称为曲面的**坐标曲线**. 使 $v=$ 常数而 u 变动时的曲线叫做 u-曲线, 同样, $u=$ 常数的曲线叫做 v-曲线. 两族坐标曲线 u-曲线($v=$ 常数) 与 v-曲线($u=$ 常数)在曲面上构成的坐标网, 称为曲面上的**曲纹坐标网**(图 2-4).

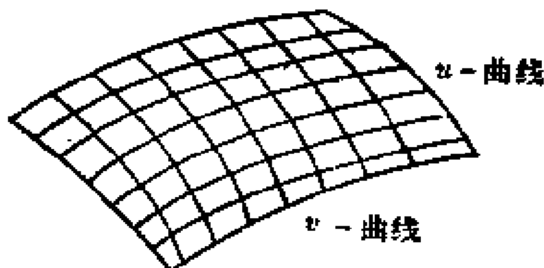


图 2-4

实例

i) 圆柱面　θ-曲线($z=$常数)：是垂直于 z 轴的平面和圆柱的交线，它们都是圆.

z-曲线($\theta=$常数)：是圆柱面的直母线.

ii) 球面　φ-曲线($\theta=$常数)：是球面上等纬度的圆——纬线.

θ-曲线($\varphi=$常数)：是球面上过两极的半圆——子午线(经线).

iii) 旋转面　θ-曲线($t=$常数)：是垂直于 z 轴的平面和旋转面的交线——平行圆(纬线).

t-曲线($\theta=$常数)：是旋转面的母线——子午线(经线).

1.2　光滑曲面　曲面的切平面和法线

如果曲面方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

中的函数有直到 k 阶的连续偏微商，则称为 **k 阶正则曲面**或称为 **C^k 类曲面**. 特别地，C^1 类曲面又称为**光滑曲面**. 以后我们假定所讨论的曲面都是光滑的.

过曲面上每一点 (u_0, v_0) 有一条 u-曲线：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v_0)$$

又有一条 v-曲线：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0,v)$$

在曲面上 (u_0, v_0) 点处的这两条坐标曲线的切向量分别为

$$\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0,v_0),\qquad \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$$

如果它们不平行，即 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 在 (u_0, v_0) 点不等于零，则称 (u_0, v_0) 点为曲面的正常点．以后我们只讨论曲面的正常点．

根据 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 的连续性(因为曲面是光滑的)，如果 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 在 (u_0, v_0) 处不为零，则总存在 (u_0, v_0) 的一个邻域 U，使得在此邻域内，$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$．于是，在这片曲面上，有一族 u-曲线和一族 v-曲线：经过曲面上每一点有唯一的一条 u-曲线和唯一的一条 v-曲线，而且这两族曲线彼此不相切．这样的两族曲线称为曲面上的一个正规坐标网．

由于在正常点的邻域 U 内 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$，即矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

的秩为 2，换言之，下列三个行列式中

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

总有一个行列式在 (u_0, v_0) 的邻域 U 中不为零．假设第一个行列式不等于零，则由隐函数的存在定理，

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v)$$

在 U 中存在唯一一对单值的连续可微函数

$$u=u(x, y), \quad v=v(x, y)$$

把上式代入 (2.1)$'$ 中的最后一个方程，则曲面在邻域 U 上的参数表示可以写成

$$z=z[u(x, y), \ v(x, y)]=z(x, y)$$

即

$$z=z(x, y) \tag{2.3}$$

(2.3)为曲面的特殊的一种参数表示. 于是我们得到

命题 1 曲面在正常点的邻域中总可以有(2.3)形式的参数表示.

若曲面上点的曲纹坐标由下列方程来确定:

$$u=u(t), \quad v=v(t) \tag{2.4}$$

其中 t 是自变数，把它们代入曲面的参数方程中，则这种点的向径可以用复合函数来表示:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t), v(t)]=\boldsymbol{r}(t) \tag{2.5}$$

于是 $\boldsymbol{r}$ 可以表示为一个变数 t 的函数，且当 t 在某一区间上变动时，$\boldsymbol{r}$ 的终点在空间中描绘一条曲线. 因此(2.4)或(2.5)在曲面上确定某一曲线，这曲线在曲面上(u_0, v_0)点处的切方向称为曲面在该点的**切方向**或**方向**. 它平行于

$$\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{dt} \tag{2.6}$$

其中 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 分别是在(u_0, v_0)点的两条坐标曲线的切向量.

上式说明 $\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 共面，所以有

命题 2 曲面上正常点处的所有切方向都在过该点的坐标曲线的切向量 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 所决定的平面上.

我们称此平面为曲面在这一点的**切平面**(图 2-5).

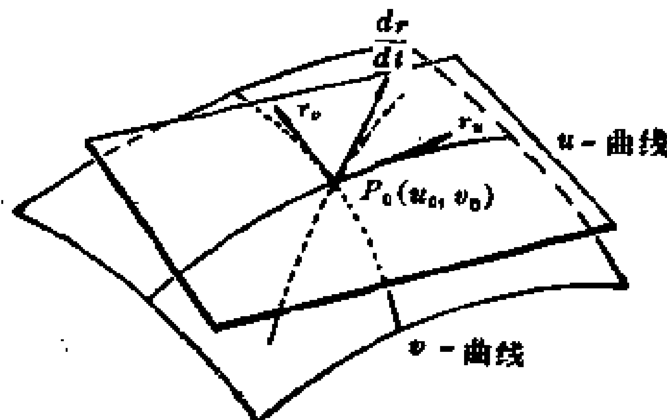


图 2-5

(2.6)还可以简写成

$$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{dv}{dt}\left(\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dv}+\boldsymbol{r}_v\right)$$

由此可见，$\boldsymbol{r}'(t)$所决定的曲面的切方向，完全依赖于$\frac{du}{dt}$和$\frac{dv}{dt}$的比值 $du:dv$. 因此，以后我们说到给出曲面上某点的一方向时，就是指给出了 $du:dv$.

下面我们导出曲面上一点$P_0(u_0, v_0)$的切平面的方程. 设$\boldsymbol{R}(x, y, z)$表示切平面上的任意点M的向径，则根据切平面的定义，向量 $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$与向量 $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$共面. 由此得出曲面上$P_0(u_0, v_0)$点的切平面的方程为：

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(u_0, v_0),\ \ \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0),\ \ \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0))=0$$

或写成坐标的形式

$$\begin{vmatrix} X-x(u_0, v_0) & Y-y(u_0, v_0) & Z-z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}=0$$

对于曲面(2.3)形式的参数表示

$$\boldsymbol{r}=\{x, y, z(x, y)\}$$

$$\boldsymbol{r}_x=(1, 0, p),\ \ \boldsymbol{r}_y=(0, 1, q)$$

其中

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ \ q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

则曲面在(x_0, y_0)点处的切平面的方程是

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ 1 & 0 & p_0 \\ 0 & 1 & q_0 \end{vmatrix}=0$$

即

$$Z-z_0=p_0(X-x_0)+q_0(Y-y_0)$$

其中

$$z_0=z(x_0,y_0),\ p_0=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ q_0=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

曲面在正常点处垂直于切平面的方向称为曲面的**法方向**. 过这点平行于法方向的直线称为曲面在该点的**法线**. 显然, 曲面的法向量$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$. 于是曲面的单位法向量$=\dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$.

由于曲面的法线是通过点$P(x,y,z)$, 并且平行于法方向的直线, 因而它的方程可写为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)$$

其中 $\boldsymbol{R}(X, Y, Z)$是法线上的任意一点, λ 是决定点 $\boldsymbol{R}$ 在法线上的位置的参数.

用坐标表示的法线方程具有如下的形式:

$$\frac{X-x(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}}=\frac{Y-y(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} z_u(u_0,v_0) & x_u(u_0,v_0) \\ z_v(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{Z-z(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}}$$

对于曲面(2.3)形式的参数表示, 法线方程可简化为

$$\frac{X-x_0}{p_0}=\frac{Y-y_0}{q_0}=\frac{Z-z_0}{-1}$$

例 求圆柱面 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta,\ R\sin\theta, z\}$在任一点的切平面和法线方程.

解 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta, R\sin\theta, z\}$

$\boldsymbol{r}_\theta=\{-R\sin\theta, R\cos\theta, 0\}$

$\boldsymbol{r}_z=\{0, 0, 1\}$

在任一点的切平面方程为

$$\begin{vmatrix} X-R\cos\theta & Y-R\sin\theta & Z-z \\ -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

即

$$\cos\theta X+\sin\theta Y-R=0$$

在任一点的法线方程为

$$\frac{X-R\cos\theta}{\begin{vmatrix} R\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{Y-R\sin\theta}{\begin{vmatrix} 0 & -R\sin\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} -R\sin\theta & R\cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

即

$$\begin{cases} \sin\theta X-\cos\theta Y=0 \\ Z-z=0 \end{cases}$$

如果曲纹坐标(u, v)变为新的曲纹坐标$(\bar{u}, \bar{v})$:

$$u=u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v=v(\bar{u}, \bar{v})$$

则得到曲面关于新曲纹坐标$(\bar{u}, \bar{v})$的方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\bar{u}, \bar{v})$$

由于新的坐标曲线的切向量$\boldsymbol{r}_{\bar{u}}$和$\boldsymbol{r}_{\bar{v}}$可以用原来的坐标曲线的切向量$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$来表示:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{\bar{u}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \boldsymbol{r}_{\bar{v}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{cases}$$

因此

$$\overline{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{r}_{\bar{u}}\times\boldsymbol{r}_{\bar{v}}=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}-\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right)=\boldsymbol{N}\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \qquad (2.7)$$

由此可见,假定行列式

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (2.8)$$

则 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \mathbf{0}$ 对于新的曲纹坐标仍成立.

(2.7)表示当曲纹坐标(u, v)施行变换时，新法向量$\overline{\boldsymbol{N}}$为原来法向量$\boldsymbol{N}$乘上变换行列式(2.8). 因而，可以看出新的法向量$\overline{\boldsymbol{N}}$平行于原来的法向量$\boldsymbol{N}$. 如果变换行列式(2.8)为正时，$\boldsymbol{N}$与$\overline{\boldsymbol{N}}$的方向一致；如果变换行列式(2.8)为负时，$\boldsymbol{N}$和$\overline{\boldsymbol{N}}$的方向相反. 现在我们限制参数变换的行列式(2.8)为正，于是对于所有的参数变换法向量的正向保持不变. 在这个限制下，我们称沿法向量$\boldsymbol{N}$的正向为曲面的**正侧**.

由向量积的定义，$\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{N}$顺序构成右手系. 我们还要指出的是，曲面正侧的确定与参数的确定有关，例如，当坐标曲线u与v对调时，则$\boldsymbol{N}$改变为它的反向，因而曲面正侧变为负侧，这时我们把所讨论的曲面称为双侧曲面.

1.3 曲面上的曲线族和曲线网

给出一光滑曲面 S:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$$

曲面S上一曲线的方程是

$$u=u(t), \quad v=v(t) \tag{2.9}$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t), v(t)]=\boldsymbol{r}(t) \tag{2.10}$$

从(2.9)消去 t，可以得曲面上曲线方程的其他形式:

$$u=\varphi(v) \tag{2.11}$$

或

$$v=\psi(u) \tag{2.12}$$

或

$$f(u, v)=0 \tag{2.13}$$

下列线性微分方程

$$A(u, v)du+B(u, v)dv=0 \tag{2.14}$$

表示曲面上一族曲线——曲线族．设 $A\neq 0$，则由(2.14)得

$$\frac{du}{dv}=-\frac{B(u,v)}{A(u,v)}=F(u,v)$$

解方程得

$$u=\varphi(v,c)$$

其中 c 是待定常数．每一个 c 值对应曲面上一条曲线，所以上式得到曲面上的一族曲线．(2.14)表示这族曲线的方程．

特别地，$A=0$ 或 $B=0$ 时(2.14)为

$$dv=0 \text{ 或 } du=0 \tag{2.15}$$

即

$$v=c_1 \text{ （常数）}$$

或

$$u=c_2 \text{ （常数）}$$

因此(2.15)表示坐标曲线的方程．

下列二阶微分方程

$$A(u,v)du^2+2B(u,v)dudv+C(u,v)dv^2=0 \tag{2.16}$$

(假设$[B(u,v)]^2-A(u,v)C(u,v)>0$)表示曲面上两族曲线——曲线网．设 $A\neq 0$，由

$$A\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2B\left(\frac{du}{dv}\right)+C=0$$

得

$$\frac{du}{ds}=\frac{-B(u,v)\pm\sqrt{[B(u,v)]^2-A(u,v)C(u,v)}}{A(u,v)}$$

$$=F_1(u,v) \text{ 或 } F_2(u,v)$$

分别解这两个一阶微分方程，即得曲面上两族曲线．曲面上两族曲线构成曲面上一曲线网，(2.16)表示曲面上曲线网的方程．

特别地，$A=C=0$ 时，(2.16)为

$$dudv=0 \tag{2.17}$$

若

$$du=0$$

则

$$u=c_1\ (\text{常数})$$

这表示 v-曲线族．若

$$dv=0$$

则

$$v=c_2\ (\text{常数})$$

这表示 u-曲线族．因此(2.17) 所表示的曲线网就是曲纹坐标网．

习　题

1　求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, bv\}$ 的坐标曲线．

2　证明双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{a(u+v), b(u-v), 2uv\}$ 的坐标曲线就是它的直母线．

3　求球面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta\cos\varphi,\ a\cos\theta\sin\varphi,\ a\sin\theta\}$ 上任意点的切平面和法线方程．

4　求椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在任意点的切平面方程，并证明沿每一条直母线，此曲面只有一个切平面．

5　证明曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{u, v, \frac{a^3}{uv}\right\}$ 的切平面和三个坐标平面所构成的四面体的体积是常数．

§2　曲面的第一基本形式

2.1　曲面的第一基本形式　曲面上曲线的弧长

给出曲面 S：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v) \tag{2.2}$$

上的曲线(C)：

$$u=u(t), v=v(t) \tag{2.18}$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t), v(t)]$$

对于曲线(C)有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{dt}$$

或者

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv$$

若以 s 表示曲面上曲线的弧长，则

$$\begin{aligned} ds^2&=d\boldsymbol{r}^2=(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)^2\\ &=\boldsymbol{r}_u^2du^2+2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v dudv+\boldsymbol{r}_v^2dv^2\end{aligned}$$

令

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \tag{2.19}$$

则有

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{2.20}$$

这个二次形式可以决定曲面上曲线的弧长．设曲线(C)上两点 $A(t_0)$，$B(t_1)$，则弧长为

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\frac{ds}{dt}dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

(2.20)是关于微分 du, dv 的一个二次形式，称为曲面S 的**第一基本形式**．用Ⅰ表示：

$$\mathrm{I}=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

它的系数

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\qquad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\qquad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v$$

称为曲面S 的**第一类基本量**．

曲面的第一基本形式在曲面论中占有非常重要的地位．

对于曲面的特殊参数表示 $z=z(x,y)$有

$$\boldsymbol{r}=\{x, y, z(x,y)\}$$

则

$$\boldsymbol{r}_x=\{1, 0, p\}, \qquad p=\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{r}_y=\{0, 1, q\}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

由(2.19)有

$$E=\boldsymbol{r}_x\cdot\boldsymbol{r}_x=1+p^2, \quad F=\boldsymbol{r}_x\cdot\boldsymbol{r}_y=pq, \quad G=\boldsymbol{r}_y\cdot\boldsymbol{r}_y=1+q^2$$

曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=(1+p^2)dx^2+2pqdxdy+(1+q^2)dy^2$$

由(2.19)知

$$E=\boldsymbol{r}_u{}^2>0, \qquad G=\boldsymbol{r}_v{}^2>0$$

又根据拉格朗日恒等式可知第一基本形式的判别式

$$EG-F^2=\boldsymbol{r}_u{}^2\boldsymbol{r}_v{}^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2>0$$

因此第一类基本量 E、F、G 满足不等式 $E>0, G>0$, $EG-F^2>0$. 这表明第一基本形式是正定的. 这个结论也可由 $\mathrm{I}=ds^2$ 直接得出.

例 1 求球面 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\}$ 的第一基本形式.

解 由 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\}$

可得出

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\{-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta\cos\varphi, 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta\}$$

由此得到曲面的第一类基本量

$$E=\boldsymbol{r}_\varphi\cdot\boldsymbol{r}_\varphi=R^2\cos^2\theta$$

$$F=\boldsymbol{r}_\varphi\cdot\boldsymbol{r}_\theta=0$$

$$G=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\theta=R^2$$

因而

$$\mathrm{I}=R^2\cos^2\theta d\varphi^2+R^2d\theta^2$$

例 2 求正螺面(图 2-6)的第一基本形式.

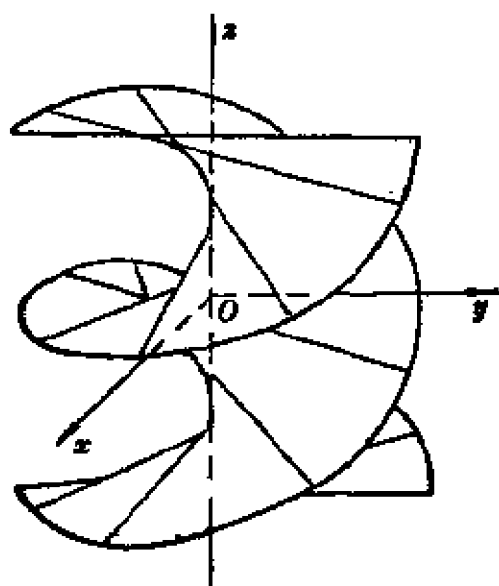


图 2-6

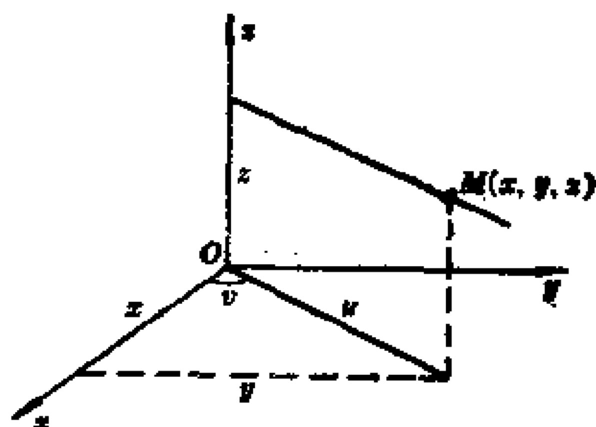


图 2-7

解 取螺旋轴为 z 轴, 以 v 表示直线与 x 轴的交角, 以 u 表示直线上的点 M 到 z 轴的距离 (图 2-7), 则正螺面的参数方程可写为下列形式:

$$x=u\cos v, \qquad y=u\sin v, \qquad z=av$$

上式关于 u 和 v 微分得

$$x_u=\cos v, \qquad y_u=\sin v, \qquad z_u=0$$

$$x_v=-u\sin v, \qquad y_v=u\cos v, \qquad z_v=a$$

因此

$$E=1, \qquad F=0, \qquad G=u^2+a^2$$

$$\mathrm{I}=ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$$

2.2 曲面上两方向的交角

前面已经提到过曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ 上一点 (u_0, v_0) 的切方向称为曲面上的方向, 它能表示为

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)du+\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)dv$$

其中 $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ 和 $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ 是过 (u_0, v_0) 点的坐标曲线的切向量.

给定了曲面的参数表示式后 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 是已知的，因此给出一方向 $d\boldsymbol{r}$ 就等于给出一对值 du、dv，不过方向和 $d\boldsymbol{r}$ 的长度无关，所以给出 $du:dv$ 就能确定曲面上的一方向．我们以后经常用 (d)，$d\boldsymbol{r}$ 或 $du:dv$ 表示曲面上的一方向．

给出曲面上两个方向 $(du:dv)$ 和 $(\delta u:\delta v)$，我们把向量 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv$ 和 $\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v$ 间的交角称为方向 $(du:dv)$ 和 $(\delta u:\delta v)$ 间的角．

现在求方向 (d) 和 (δ) 间的交角 θ．由于

$$d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=|d\boldsymbol{r}||\delta\boldsymbol{r}|\cos\theta$$

所以

$$\cos\theta=\frac{d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}||\delta\boldsymbol{r}|}$$

由于

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv,\ d\boldsymbol{r}^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

$$\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v,\ \delta\boldsymbol{r}^2=E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2$$

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}&=(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)\cdot(\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v)\\&=Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v\end{aligned}$$

由此得 $\cos\theta$ 的表示式

$$\cos\theta=\frac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}} \tag{2.21}$$

由这个公式可以推出曲面上两个方向 $(du:dv)$ 和 $(\delta u:\delta v)$ 垂直的条件是

$$Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v=0 \tag{2.22}$$

此外我们还可以求出坐标曲线 u-曲线($v=$常数)和 v-曲线($u=$常数)的交角 ω 的表示式．因为 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 是坐标曲线的切向量，所以 $\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$ 间的交角 ω 为

$$\cos\omega=\frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v|}=\frac{F}{\sqrt{EG}} \tag{2.23}$$

由此推出曲面的坐标网是正交的必要和充分条件是 $F=0$.

例 3 证明旋转面 $\boldsymbol{r}=\{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$ 的坐标网是正交的.

证明

$$\boldsymbol{r}=\{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-\varphi(t)\sin\theta, \varphi(t)\cos\theta, 0\}$$

$$\boldsymbol{r}_t=\{\varphi'(t)\cos\theta, \varphi'(t)\sin\theta, \psi'(t)\}$$

由此得到

$$F=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_t=0$$

即坐标网是正交的.

同样我们也可以证明圆柱面，球面，正螺面上的坐标网是正交的.

2.3 正交曲线族和正交轨线

给出两族曲线

$$A du+B dv=0,\quad C\delta u+D\delta v=0$$

如果它们正交，由(2.22)可以得出

$$E+F\left(\frac{dv}{du}+\frac{\delta v}{\delta u}\right)+G\frac{dv}{du}\frac{\delta v}{\delta u}=0 \tag{2.24}$$

即

$$E-F\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)+G\frac{A}{B}\frac{C}{D}=0$$

或

$$EBD-F(AD+BC)+GAC=0$$

另外如果给出一族曲线

$$A du+B dv=0$$

则另一族和它正交的曲线称为这族曲线的正交轨线。

从(2.24)可以看出正交轨线的微分方程是

$$E+F\left(-\frac{A}{B}+\frac{\delta v}{\delta u}\right)+G\left(-\frac{A}{B}\right)\frac{\delta v}{\delta u}=0$$

即

$$\frac{\delta v}{\delta u}=\frac{BE-AF}{BF-AG}$$

2.4 曲面域的面积

设曲面 S:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

给出曲面 S 上一个区域 D，我们将推导其面积的计算公式.

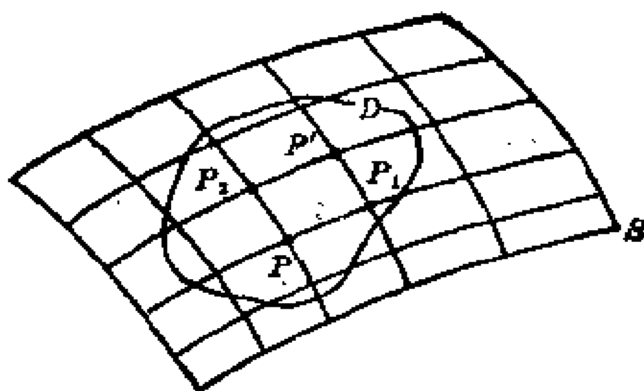


图 2-8

首先把曲面域用坐标曲线 $u=$ 常数与 $v=$ 常数剖分成完整的和不完整的曲边四边形(图 2-8). u-曲线和 v-曲线越密，那些完整的曲边四边形就越接近平行四边形，而那些不完整的曲边四边形的面积在整个曲面域面积里所占的比重就越小，以至于可以略去.

取以点 (u,v), $(u+du,v)$, $(u+du,v+dv)$, $(u,v+dv)$ 为顶点的曲边四边形，可以近似地把它换成切平面上的一个平行四边形. 这个平行四边形以切于坐标曲线的向量 $\boldsymbol{r}_u du$ 与 $\boldsymbol{r}_v dv$ 为边(图 2-9). 我们把所取的曲边四边形的面积可以认为近似地等于

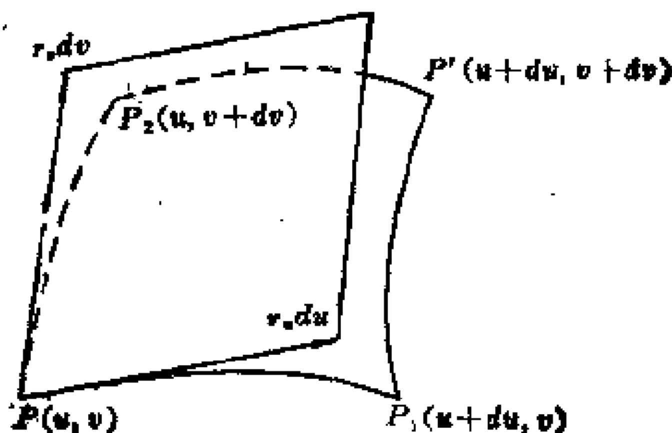


图 2-9

以 $\boldsymbol{r}_u du$, $\boldsymbol{r}_v dv$ 为边的平行四边形的面积.

由于平行四边形的面积等于两边之积再乘以它们交角的正弦. 于是,上述的平行四边形的面积 $d\sigma$ 为

$$d\sigma = |\boldsymbol{r}_u du \times \boldsymbol{r}_v dv| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du dv$$

因此,曲面域 D 的面积 σ 可由二重积分来表示:

$$\sigma \text{ 的面积} = \iint_D d\sigma = \iint_{\mathscr{D}} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du dv \tag{2.25}$$

这里的区域 $\mathscr{D}$ 是曲面域 D 相对应的 (u, v) 平面上的区域. 由于

$$(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2 > 0$$

所以*)

$$\sigma \text{ 的面积} = \iint_{\mathscr{D}} \sqrt{EG - F^2} du dv \tag{2.26}$$

这样,我们看到曲面上曲线的弧长、曲面上两方向的交角、以及曲面域的面积都可以用第一类基本量 E、F、G 来表示. 仅由第一基本形式出发所能建立的几何性质称为曲面的**内在性质或称内蕴性质**. 以上这些度量性质都是曲面的内蕴性质.

2.5 等距变换

给出两个曲面

$$S: \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

$$S_1: \ \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(u_1, v_1)$$

如果其对应点的参数之间存在一一对应关系

$$u_1 = u_1(u, v)$$

$$v_1 = v_1(u, v)$$

---

*) 我们这里只是直观地推导了曲面的面积公式. 关于曲面面积概念的严格叙述与曲面面积公式的严格推导, 详见 C. Goffman 著《多元微积分》(史济怀, 彭家贵等译, 人民教育出版社出版, 1979)第四章第 7 节.

函数 $u_1(u,v)$, $v_1(u,v)$ 连续, 有连续的偏导数. 并且函数行列式

$$\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

则 S 和 S_1 之间的一一对应关系称为 S 到 S_1 的变换.

因此, 如果 S 和 S_1 之间有符合上述条件的对应关系, 则在 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(u_1, v_1)$ 上就可以经过参数变换

$$u_1 = u_1(u, v)$$

$$v_1 = v_1(u, v)$$

使

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1[u_1(u,v), v_1(u,v)]=\boldsymbol{r}_1(u,v)$$

即 S_1 也以 u, v 为参数.

这样, 曲面 S 和 S_1 的对应点就有相同的参数. 因而在以下讨论变换时, 如无特别声明, 总假定对应点有相同的参数.

在取定相同的参数时, 曲面 S 上的点 (u, v) 对应曲面 S_1 上的点 (u,v) (即 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 对应 $\boldsymbol{r}_1(u, v)$). 曲面 S 上的曲线 $u=u(t)$, $v=v(t)$ $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 对应曲面 S_1 上的曲线 $u=u(t)$, $v=v(t)$ $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (即 $\boldsymbol{r}[u(t), v(t)]$ 对应 $\boldsymbol{r}_1[u(t), v(t)]$), 也就是对应曲线有相同的方程. 曲面 S, S_1 的第一基本形式分别为

$$\mathrm{I}=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

$$\mathrm{I}_1=E_1du^2+2F_1dudv+G_1dv^2$$

其中

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v$$

$$E_1=\boldsymbol{r}_{1u}\cdot\boldsymbol{r}_{1u},\quad F_1=\boldsymbol{r}_{1u}\cdot\boldsymbol{r}_{1v},\quad G_1=\boldsymbol{r}_{1v}\cdot\boldsymbol{r}_{1v}$$

定义 曲面之间的一个变换, 如果它保持曲面上任意曲线的长度不变, 则这个变换称为**等距变换**(保长变换).

由于曲面上曲线的长度是由曲线的参数方程和曲面的第一基本形式所确定, 而上面所述对应的曲线又有相同的参数方程, 所以如果对应曲面的第一基本形式相同:

$$\mathrm{I}=\mathrm{I}_1$$

也即

$$E(u,v)=E_1(u,v),\ F(u,v)=F_1(u,v),\ G(u,v)=G_1(u,v)$$

则曲面S和S_1之间的变换就是等距变换.

定理 两个曲面之间的一个变换是等距的充要条件是经过适当选择参数后,它们具有相同的第一基本形式.

证明 充分性已证,以下证明必要性.

设曲面S与S_1之间的一个变换是等距的,且对应点取相同的参数,则S上的任意一条曲线$\boldsymbol{r}[u(t),\ v(t)]$和$S_1$上的对应曲线$\boldsymbol{r}_1[u(t),v(t)]$有相同的长度,即对于$[t_0,t_1]$的任意$t$有

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{t}\sqrt{E_1\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F_1\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G_1\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

因此

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=E_1du^2+2F_1dudv+G_1dv^2$$

对曲面S, S_1上的任意对应曲线都成立.

由于在曲面上任一点沿任意方向都有曲线, 所以上述等式对任一点和任意方向$(du:dv)$是恒等式, 则

$$E=E_1,\ \ F=F_1,\ \ G=G_1$$

对于对应曲面上任意一对对应点都成立.

根据这个定理我们知道, 仅由第一基本形式所确定的曲面的性质(即内蕴性质)在等距变换下保持不变. 因此, 我们在上一小节中所学过的曲面上曲线的弧长, 交角, 曲面域的面积等都是等距不变量(保长不变量). 今后我们把曲面上这种仅仅用E、F、G表示出来的几何量称为曲面的**内蕴量**.

例 正螺面$\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,av\}$的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=du^2+(u^2+a^2)dv^2$$

而悬链面 $\quad \boldsymbol{r}=\left\{a\cosh\frac{t}{a}\cos\theta, a\cosh\frac{t}{a}\sin\theta, t\right\}$, 有

$$\boldsymbol{r}_t=\left\{\sinh\frac{t}{a}\cos\theta, \sinh\frac{t}{a}\sin\theta, 1\right\}$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\left\{-a\cosh\frac{t}{a}\sin\theta, a\cosh\frac{t}{a}\cos\theta, 0\right\}$$

$$E=\sinh^2\frac{t}{a}+1=\cosh^2\frac{t}{a},\quad F=0,\quad G=a^2\cosh^2\frac{t}{a}$$

所以悬链面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\cosh^2\frac{t}{a}(dt^2+a^2d\theta^2)$$

如果令

$$\begin{cases}u=a\sinh\frac{t}{a}\\ v=\theta\end{cases}$$

则

$$u^2+a^2=a^2\cosh^2\frac{t}{a}$$

$$du=\cosh\frac{t}{a}dt,\quad dv=d\theta$$

代入悬链面的第一基本形式得

$$\mathrm{I}=du^2+(u^2+a^2)dv^2$$

这与正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, av\}$ 的第一基本形式一致. 这就是说, 上述参数之间的对应关系, 给出悬链面和正螺面之间的一个等距变换.

2.6 保角变换

定义 曲面之间的一个变换, 如果使曲面上对应曲线的交角相等, 则这个变换称为**保角变换(保形变换)**.

在下面的讨论中，我们仍假定两个曲面的对应点有相同的参数.

定理 两个曲面之间的一个变换是保角变换的充要条件是它们的第一基本形式成比例.

也就是说如果取相同参数时，两个曲面的第一基本形式

$$\mathrm{I}=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

$$\mathrm{I}_1=E_1du^2+2F_1dudv+G_1dv^2$$

有

$$\mathrm{I}_1=\lambda^2(u,v)\mathrm{I} \qquad \lambda(u,v)\neq 0$$

即第一类基本量成比例:

$$E_1:E=F_1:F=G_1:G$$

证明 充分性: 由

$$E_1=\lambda^2E,\ \ F_1=\lambda^2F,\ \ G_1=\lambda^2G$$

代入曲面上曲线的交角公式(2.21)，则得知对应曲面上曲线间的交角相等.

必要性: 由于保角变换，因此对于二曲线的正交性是保持不变的，所以从公式(2.22):

$$Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v=0$$

得到

$$E_1du\delta u+F_1(du\delta v+dv\delta u)+G_1dv\delta v=0$$

消去 δu、δv，便得

$$\frac{Edu+Fdv}{E_1du+F_1dv}=\frac{Fdu+Gdv}{F_1du+G_1dv}$$

由于 du 和 dv 的任意性，在 $dv=0$ 时得到

$$\frac{E}{E_1}=\frac{F}{F_1}$$

而在 $du=0$ 时得到

$$\frac{F}{F_1}=\frac{G}{G_1}$$

所以

$$E_1:E=F_1:F=G_1:G$$

显然，每一个等距变换都是保角变换，但保角变换一般地却不是等距变换.

例 球极投影给出球面（除北极外）到平面的一个变换（如图 2-10），如果取如图所示的一个空间直角坐标系和参数 u、v，则

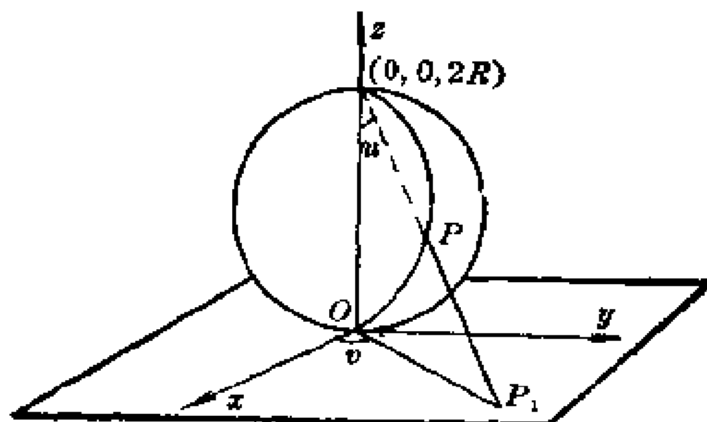


图 2-10

对应点 P 和 P_1 的坐标，也就是球面和平面的参数表示分别为

$$\begin{cases} x=2R\sin u\cos u\cos v \\ y=2R\sin u\cos u\sin v \\ z=2R\sin^2 u \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x=2R\,\mathrm{tg}\,u\cos v \\ y=2R\,\mathrm{tg}\,u\sin v \\ z=0 \end{cases}$$

其中 R 是球面的半径，则它们的第一基本形式分别为

$$\mathrm{I}=4R^2(du^2+\sin^2 u\cos^2 u\,dv^2)$$

和

$$\mathrm{I}_1=\frac{4R^2}{\cos^4 u}(du^2+\sin^2 u\cos^2 u dv^2)$$

即在球极投影下 I 与 I_1 成比例. 所以球极投影是球面到平面的一个保角变换.

习　题

1　求双曲抛物面 $r=\{a(u+v), b(u-v), 2uv\}$ 的第一基本形式.

2　求正螺面 $r=\{u\cos v, u\sin v, bv\}$ 的第一基本形式, 并证明坐标曲线互相垂直.

3　在第一基本形式为

$$\mathrm{I}=du^2+\sinh^2 u dv^2$$

的曲面上, 求方程为 $u=v$ 的曲线的弧长.

4　设一个曲面的第一基本形式为

$$ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$$

求它上面两条曲线 $u+v=0, u-v=0$ 的交角(注意, 解此题时, 不需要知道曲面和曲线的形状).

5　求曲面 $z=axy$ 上坐标曲线 $x=x_0, y=y_0$ 的交角.

6　求 u-曲线和 v-曲线的正交轨线的微分方程.

7　在曲面上一点, 含 du, dv 的二次方程

$$Pdu^2+2Qdudv+Rdv^2=0$$

确定两个切方向 $(du:dv)$ 和 $(\delta u:\delta v)$, 证明这两个方向互相垂直的充要条件是

$$ER-2FQ+GP=0$$

8　证明曲面的坐标曲线的二等分角轨线的微分方程为

$$Edu^2=Gdv^2$$

9　设曲面的第一基本形式为 $ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$, 求出曲面上由三条曲线 $u=\pm av, v=1$ 相交所成的三角形的面积.

§3　曲面的第二基本形式

3.1　曲面的第二基本形式

在 §2 中所研究的对象都是属于曲面的内蕴几何, 即所研究的

只是曲面本身的内蕴性质，而不依赖于曲面在空间中如何弯曲．为了研究曲面在空间中的弯曲性，我们有必要引进 du 和 dv 的另一个二次微分形式，就是我们在这里要介绍的第二基本形式．

设 C^2 类曲面 S 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

即 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 有连续的二阶导函数 $\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_{vv}$.

现在固定曲面 S 上一点 $P(u,v)$，并设 Π 为曲面在 P 点的切平面．

曲线 (C):

$$u=u(s),\quad v=v(s)\quad 或\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(s),v(s)]$$

是 S 上过 P 点的一曲线，其中 s 是自然参数．设 P' 是曲线 (C) 上在 P 点邻近的一点，P 和 P' 点的自然参数的值分别为 s 与 $s+\Delta s$，即 P 点的向径为 $\boldsymbol{r}(s)$，P' 点的向径为 $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$．利用泰勒公式得

$$\overrightarrow{PP'}=\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}\Delta s+\frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\varepsilon})(\Delta s)^2$$

其中 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=0$.

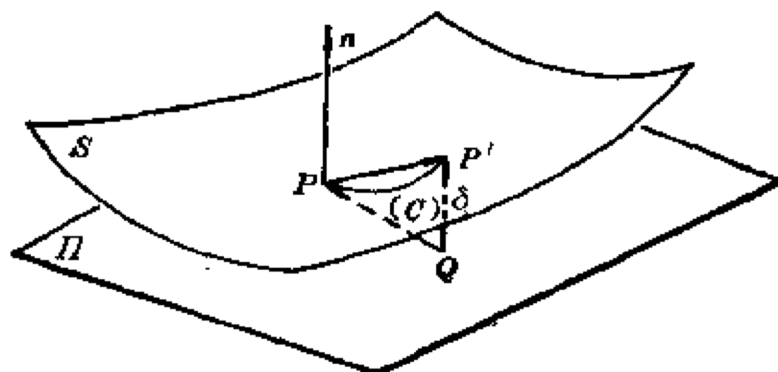


图 2-11

设 $\boldsymbol{n}$ 为曲面在 P 点的单位法向量．由 P' 作切平面 Π 的垂线，垂足为 Q，则 $\overrightarrow{QP'}=\delta\boldsymbol{n}$，其中 δ 为从平面 Π 到曲面 S 的有向距离(图 2-11)．

由于

$$\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\ \ \boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$$

所以有

$$\begin{aligned}\delta&=\overrightarrow{QP'}\cdot\boldsymbol{n}\\&=(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PP'})\cdot\boldsymbol{n}\\&=\overrightarrow{PP'}\cdot\boldsymbol{n}\\&=[\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)]\cdot\boldsymbol{n}\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\varepsilon})(\Delta s)^2\end{aligned}$$

因此当 $\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 时，无穷小距离 δ 的主要部分是

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}\ (\Delta s)^2=\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}ds^2$$

由于

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_u\dot{u}+\boldsymbol{r}_v\dot{v}\\&\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_{uu}\dot{u}^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\dot{u}\dot{v}+\boldsymbol{r}_{vv}\dot{v}^2+\boldsymbol{r}_u\ddot{u}+\boldsymbol{r}_v\ddot{v}\end{aligned}$$

又因为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=0$$

所以

$$\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}ds^2=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}du^2+2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}dudv+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}dv^2$$

引进符号：

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n},\ \ M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n},\ \ N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n} \tag{2.27}$$

则前式为

$$\mathrm{II}=\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r}=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2 \tag{2.28}$$

它称为曲面的**第二基本形式**．它的系数 L、M、N 称为曲面的**第二类基本量**．

上式表明第二基本形式近似地等于曲面与切平面的有向距离

的两倍，因而它刻划了曲面离开切平面的弯曲程度．即刻划了曲面在空间中的弯曲性．

根据上述讨论，我们可以看出第二基本形式不一定是正定的，当曲面在给定点向$\boldsymbol{n}$的正侧弯曲时为正，向$\boldsymbol{n}$的反侧弯曲时为负．

现在把曲面的单位法向量

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

代入(2.27)中，就有

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

另一方面，对关系式$\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=0$进行微分，便得

$$d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r}=0$$

由此得出

$$\mathrm{II}=\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r}=-d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}$$

第二类基本量还可以用另外的形式来表示．由于$\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$在切平面上，所以

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}=0$$

将上两式微分后得

$$\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u=0\qquad \boldsymbol{r}_{vu}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u=0$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=0\qquad \boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v=0$$

与(2.27)比较，我们得到

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u$$

$$M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u$$

$$N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v$$

例1 计算球面 $\boldsymbol{r}=(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$ 的第二基本形式.

解 $\boldsymbol{r}=(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=(-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$$

由此得到

$$E=\boldsymbol{r}_\varphi\cdot\boldsymbol{r}_\varphi=R^2\cos^2\theta,\ \ F=\boldsymbol{r}_\varphi\cdot\boldsymbol{r}_\theta=0,\ \ G=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\theta=R^2$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_\varphi\times\boldsymbol{r}_\theta}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{R^2\cos\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -R\cos\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi & 0\\ -R\sin\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

又由于

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi}=(-R\cos\theta\cos\varphi, -R\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\theta}=(R\sin\theta\sin\varphi, \quad -R\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=(-R\cos\theta\cos\varphi, -R\cos\theta\sin\varphi, -R\sin\theta)$$

所以

$$L=\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi}\cdot\boldsymbol{n}=-R\cos^2\theta,\ \ M=\boldsymbol{r}_{\varphi\theta}\cdot\boldsymbol{n}=0,\ \ N=\boldsymbol{r}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{n}=-R$$

因而得到

$$\mathrm{II}=-(R\cos^2\theta d\varphi^2+Rd\theta^2)$$

对于曲面的特殊的参数表示 $z=z(x, y)$, 有

$$\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z(x, y))$$

$$\boldsymbol{r}_x=(1,\ 0,\ p)$$

$$\boldsymbol{r}_y=(0,\ 1,\ q)$$

$$\boldsymbol{r}_{xx}=(0,\ 0,\ r)$$

$$\boldsymbol{r}_{xy}=(0,\ 0,\ s)$$

$$\boldsymbol{r}_{yy}=(0,\ 0,\ t)$$

其中

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

第一类基本量为

$$E=\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_x=1+p^2, \ F=\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_y=pq, \ G=\boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{r}_y=1+q^2$$

第一基本形式为

$$\mathrm{I}=(1+p^2)dx^2+2pqdxdy+(1+q^2)dy^2$$

则有

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

由此得出第二类基本量为

$$L=\boldsymbol{r}_{xx} \cdot \boldsymbol{n}=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$M=\boldsymbol{r}_{xy} \cdot \boldsymbol{n}=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$N=\boldsymbol{r}_{yy} \cdot \boldsymbol{n}=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

第二基本形式为

$$\mathrm{II}=\frac{r}{\sqrt{1+p^2-q^2}}dx^2+2\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dxdy+\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dy^2$$

例 2 计算抛物面 $z=a(x^2+y^2)$ 的第一基本形式和第二基本形式.

解 先计算

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=2ax, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=2ay$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a, \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2a$$

再计算

$$E=1+p^2=1+4a^2x^2,\quad F=pq=4a^2xy,\quad G=1+q^2=1+4a^2y^2$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}}$$

$$M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0$$

$$N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}}$$

由此得到

$$\mathrm{I}=(1+4a^2x^2)dx^2+8a^2xydxdy+(1+4a^2y^2)dy^2$$

$$\mathrm{II}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}}dx^2+\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}}dy^2$$

3.2 曲面上曲线的曲率

由以上的讨论我们已经了解到曲面在已知点邻近的弯曲性可以由曲面离开它的切平面的快慢来决定．但是曲面在不同的方向弯曲的程度不同，也就是说在不同的方向曲面以不同的速度离开切平面．因此，当我们想刻划曲面在已知点邻近的弯曲性时，就需要用曲面上过该点的不同的曲线的曲率来进行研究．

给出 C^2 类曲面 S:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

过曲面 S 上点 $P(u,v)$ 的任一曲线 (C) 为:

$$u=u(s),\quad v=v(s)$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(s),v(s)]=\boldsymbol{r}(s)$$

其中 s 是自然参数．

我们仍用以前的符号，以 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 分别表示曲线 (C) 的切向量和主法向量．根据伏雷内公式有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{\alpha}}=k\boldsymbol{\beta}$$

其中 k 是曲线(C)在 P 点的曲率.

若以 θ 表示曲线 (C) 的主法向量 β 和曲面法向量 n 的夹角(图 2-12)，则

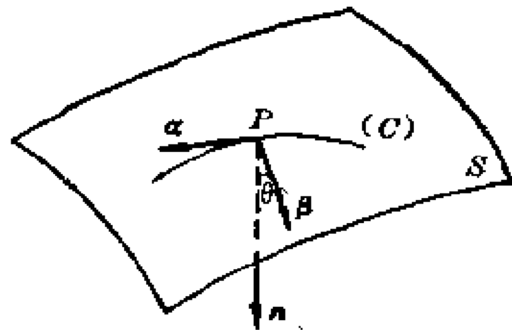


图 2-12

$$\ddot{r}\cdot n = k\beta\cdot n = k\cos\theta$$

另一方面，由于

$$n\cdot\ddot{r} = n\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{n\cdot d^2r}{ds^2} = \frac{\text{II}}{\text{I}}$$

因此

$$k\cos\theta = \frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \tag{2.29}$$

上式中的右端依赖于第一、第二类基本量和$\frac{du}{dv}$. 由于 E、F、G、L、M、N 都是参数(u, v)的函数，它们在曲面上一个给定点 P 都具有确定的值，$\frac{du}{dv}$是曲线在该点的切方向，所以对曲面上一个给定点及曲面曲线在该点的切方向，上式右端都有确定的值. 因此若在曲面上一个给定点相切的两条曲面曲线，在该点它们的主法线有相同的方向，则它们的角度 θ 也相同，所以根据(2.29)， k 也相同.

如果在曲面的任何曲线(C)上一点 P，作通过(C)在 P 点的切线与主法线的平面(即密切平面)，得到这个平面与曲面的截线. 这条平面曲线与曲线(C)具有相同的切线与主法线，所以曲率也相同. 这样，对于曲面曲线的曲率的研究可以转化为对于这曲面上一条平面截线的曲率的讨论. 根据这样的分析，以下我们引入曲面上特殊的平面截线.

给出曲面 S 上一点 P 和 P 点处一方向$(d) = du:dv$，设 n 为曲面在 P 点的法方向，则(d)和 n 所确定的平面称为曲面在 P 点的沿

方向(d)的法截面，这法截面和曲面S的交线称为曲面在P点的沿方向(d)的法截线。

设方向$(d)=du:dv$所确定的法截线(C_0)在P点的曲率为k_0。对于法截线(C_0)，主法向量$\beta_0=\pm \boldsymbol{n}$，$\theta_0=0$或$\pi$，所以由(2.29)知它的曲率$k_0\geqslant 0$为

$$\pm k_0=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$$

即

$$k_0=\pm\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \tag{2.30}$$

其中$\boldsymbol{n}$和(C_0)的主法向量β_0的方向相同时取正号，反之取负号（如图 2-13），即法截线向$\boldsymbol{n}$的正侧弯曲时取正号；反之，向$\boldsymbol{n}$的反侧弯曲时取负号。

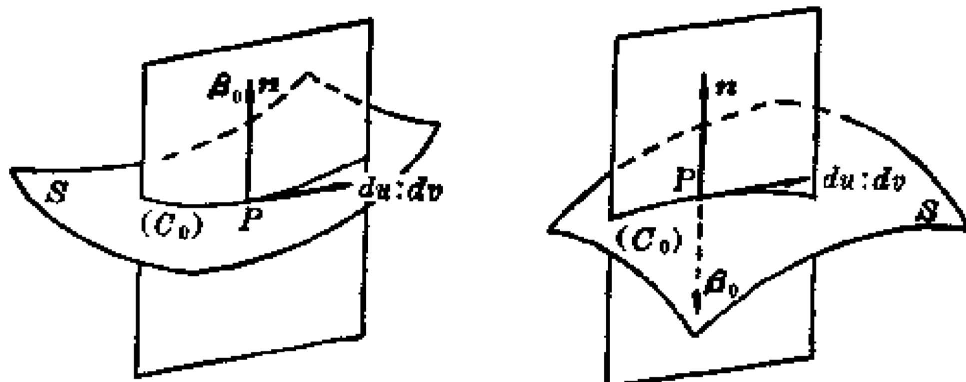


图 2-13

考虑曲面上一点在一方向(d)上的弯曲程度仅由$k_0\geqslant 0$还不能完全确定，还要考虑曲面弯曲的方向才能全面刻划曲面上一点在方向(d)上的弯曲性，因此我们再引入法曲率的概念。

定义 曲面在给定点沿一方向的法曲率k_n为

$$k_n=\begin{cases}+k_0 & \text{法截线向}\ \boldsymbol{n}\ \text{的正侧弯曲}\\ -k_0 & \text{法截线向}\ \boldsymbol{n}\ \text{的反侧弯曲}\end{cases}$$

由公式(2.30)可得

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \tag{2.31}$$

设曲面上的一曲线(C)和法截线(C_0)切于点P. 换言之，它们有相同的切方向$(d)=du:dv$，则从(2.29)和(2.31)可得

$$k_n=k\cos\theta$$

根据这个关系式，所有关于曲面曲线的曲率都可以化为法曲率来讨论.

若设$R=\frac{1}{k}$，$R_n=\frac{1}{k_n}$，R称为曲线(C)的曲率半径，R_n称为曲线(C_0)的曲率半径也称为法曲率半径. 则上式又能写成

$$R=R_n\cos\theta$$

这个公式的几何意义可以叙述如下：

梅尼埃(Meusnier)定理 曲面曲线(C)在给定点P的曲率中心C就是与曲线(C)具有共同切线的法截线(C_0)上同一个点P的曲率中心C_0在曲线(C)的密切平面上的投影(图 2-14).

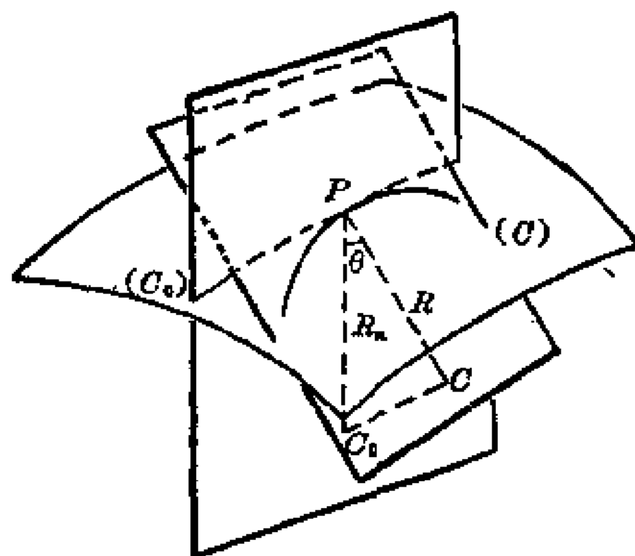


图 2-14

例 3 若给出的曲面是球面，球面的切平面垂直于过切点的半径，这个半径就是球面的法线. 所以球面的所有法线过它的球心，因此在球面的每一点处所取的法截面必过球心. 由此推出所

有法截线(C_0)是球面的大圆，并且任意法截线(C_0)的曲率中心C_0就是这个球的球心．另一方面，若取球面的任意平面截线为曲线(C)，则所得到的是圆，因此(C)的曲率中心是这个圆的圆心C（图2-15）．现在如果从(C_0)的曲率中心C_0（也就是球心）作圆(C)所在平面的垂线，则垂足是圆(C)的圆心，也就是曲线(C)的曲率中心C.

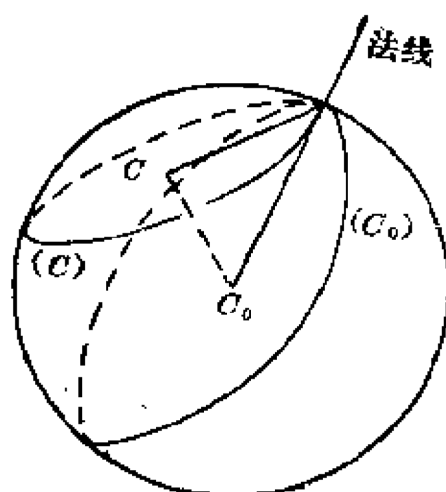


图 2-15

3.3 杜邦(Dupin)指标线

通过曲面上一点P可以作无数多条法截线，现在来研究这些法截线的法曲率之间的关系．为此我们取点P为原点，曲面S的坐标曲线在P点的切向量$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$为基向量，则它们构成曲面S在P点切平面上的坐标系．我们给出曲面S在P点的一个切方向$(d)=(du:dv)$，设k_n是对应于方向(d)的法曲率，$|1/k_n|$为法曲率半径的绝对值．过点P沿方向(d)（即$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv$）画一线段$PN$，使其长度等于$\sqrt{\left|\frac{1}{k_n}\right|}$，则对于切平面上所有的方向，$N$点的轨迹称为曲面在$P$点的杜邦(Dupin)指标线(图 2-16)．

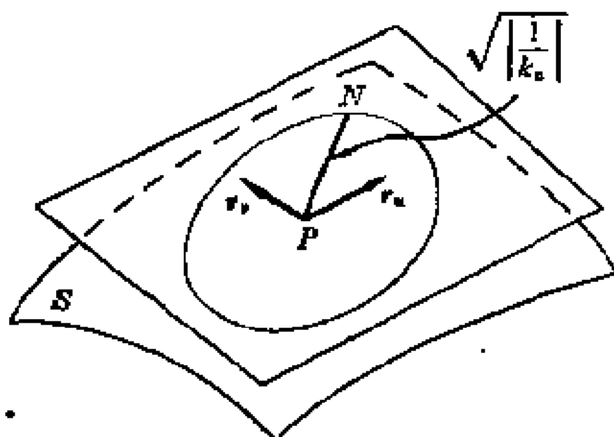


图 2-16

现在我们来推出杜邦指标线在上述坐标系下的方程．设N点的坐标为(x,y)，则

$$x\boldsymbol{r}_u+y\boldsymbol{r}_v=\sqrt{\left|\frac{1}{k_n}\right|}\frac{d\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|}=\frac{\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv}{\sqrt{|k_n|}\,|\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv|}$$

把上式两端平方，注意 $k_n=\frac{\text{II}}{\text{I}}$，得

$$Ex^2+2Fxy+Gy^2=\frac{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}{|Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2|}$$

由于 $du:dv=x:y$，上式可化为

$$Ex^2+2Fxy+Gy^2=\frac{Ex^2+2Fxy+Gy^2}{|Lx^2+2Mxy+Ny^2|}$$

因此

$$|Lx^2+2Mxy+Ny^2|=1$$

即

$$Lx^2+2Mxy+Ny^2=\pm 1$$

这就是杜邦指标线的方程.

上式中的系数 L、M、N 与曲面上的方向无关，它们对于曲面上已知点来说即为常数，并且上式中不含 x、y 的一次项，所以上述方程表示以 P 为中心的有心二次曲线.

这样，曲面上的点由它的杜邦指标线可以进行分类：

1° 如果 $LN-M^2>0$，则点 P 称为曲面的**椭圆点**，这时杜邦指标线是一椭圆.

2° 如果 $LN-M^2<0$，则点 P 称为曲面的**双曲点**，这时杜邦指标线是一对共轭双曲线.

3° 如果 $LN-M^2=0$，则点 P 称为曲面的**抛物点**，这时杜邦指标线是一对平行直线.

4° 如果 $L=M=N=0$，则点 P 称为曲面的**平点**(平面上的点都是平点)，这时杜邦指标线不存在.

3.4 曲面的渐近方向和共轭方向

如果 P 点是曲面的双曲点，则它的杜邦指标线有一对渐近线，我们把沿渐近线的方向 $(d)=du:dv$ 称为曲面在 P 点的**渐近方向**.

由解析几何中二次曲线的理论可知，这两个渐近方向满足方程

$$L_0du^2 + 2M_0dudv + N_0dv^2 = 0$$

为了避免混淆，我们在上式中用 L_0、M_0、N_0 分别表示 L、M、N 在 P 点的值。

由法曲率的公式 $k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ 也可以得到渐近方向的等价定义：曲面上的一点 P 处使 $k_n = 0$ 的方向称为曲面在 P 点的渐近方向。

曲面上的曲线，如果它上面每一点的切方向都是渐近方向，则称为**渐近曲线**。渐近曲线的微分方程是

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

命题 1 如果曲面上有直线，则它一定是曲面的渐近曲线。

证明 因为直线的曲率 $k = 0$，所以沿直线方向的法曲率 $k_n = k\cos\theta = 0$，即

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

因而直线是曲面的渐近曲线。

命题 2 曲面在渐近曲线上一点处的切平面一定是渐近曲线的密切平面。

证明 沿渐近曲线有 $k_n = 0$。由 $k_n = k\cos\theta = 0$ 得到 $k = 0$ 或 $\cos\theta = 0$。

当 $k = 0$ 时，渐近曲线是直线，这时曲面的切平面通过它，因此切平面又是密切平面。

当 $k \neq 0$，$\cos\theta = 0$ 时，曲面的法向量垂直于渐近曲线的主法向量，因此曲面的切平面除通过渐近曲线的切线外还通过渐近曲线的主法向量，所以它又是渐近曲线的密切平面。

如果曲面上的点都是双曲点，则曲面上存在两族渐近曲线，这两族渐近曲线称为曲面上的**渐近网**。

命题 3 曲面的曲纹坐标网是渐近网的充分必要条件是

$$L=N=0$$

证明 渐近网的方程是

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

曲纹坐标网的方程是

$$dudv=0$$

即

$$du=0 \text{ 或 } dv=0$$

若 $L=N=0$，代入渐近网方程可得 $Mdudv=0$，即 $du=0$ 或 $dv=0$. 反之，若 $du=0$ 或 $dv=0$，代入渐近网方程可知 $L=N=0$.

设曲面上 P 点处的两个方向为 $(d)=du:dv$ 和 $(\delta)=\delta u:\delta v$，如果包含这两个方向的直线是 P 点的杜邦指标线的共轭直径，则方向 (d) 和 (δ) 称为曲面的**共轭方向**.

我们已得到杜邦指标线的方程是

$$L_0x^2+2M_0xy+N_0y^2=\pm 1$$

设共轭方向 (d) 和 (δ) 上的两直线方程分别为 $y=kx$ 和 $y=k'x$，则由解析几何学可知 k 和 k' 应满足共轭条件

$$L_0+M_0(k+k')+N_0kk'=0$$

但

$$k=\frac{y}{x}=\frac{dv}{du},\quad k'=\frac{y}{x}=\frac{\delta v}{\delta u}$$

因此方向 (d) 和 (δ) 共轭的充分必要条件是

$$L_0du\delta u+M_0(du\delta v+dv\delta u)+N_0dv\delta v=0 \tag{2.32}$$

由于

$$\begin{aligned}-d\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}&=-(\boldsymbol{n}_udu+\boldsymbol{n}_vdv)\cdot(\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v)\\&=L_0du\delta u+M_0(du\delta v+dv\delta u)+N_0dv\delta v=0\end{aligned}$$

因而方向 (d) 和 (δ) 共轭的条件也可表示为

$$d\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$$

或

$$\delta \boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

当$(d)=(\delta)$时(2.32)变成渐近方向的方程，因此渐近方向是自共轭方向.

给出曲面上的两族曲线,如果过曲面上每一点,此两族曲线的两条曲线的切方向都是共轭方向，则这两族曲线称为曲面上的**共轭网**.

设共轭网的每一族曲线的方向分别为(d)和(δ)，则这两个方向应满足

$$Ldu\delta u+M(du\delta v+dv\delta u)+Ndv\delta v=0 \tag{2.33}$$

给出一族曲线的微分方程

$$Adu+Bdv=0 \tag{2.34}$$

我们能够找到与它共轭的曲线族的微分方程. 这只须从(2.33)和(2.34)中消去$du:dv$得

$$\begin{vmatrix} L\delta u+M\delta v & M\delta u+N\delta v \\ A & B \end{vmatrix}=0$$

所以曲线族(2.34)的共轭曲线族的方程是

$$(BL-AM)\delta u+(BM-AN)\delta v=0$$

特别地,取(2.34)为坐标曲线$dv=0$,则它的共轭曲线族是

$$L\delta u+M\delta v=0$$

要使这族曲线是v-曲线$(\delta u=0)$的充要条件是$M=0$,因而得到

命题 4 曲面的曲纹坐标网是共轭网的充分必要条件是

$$M=0$$

3.5 曲面的主方向和曲率线

曲面上一点P的两个方向,如果它们既正交又共轭,则称为曲面在P点的**主方向**.

设这两个方向是$(d)=du:dv$, $(\delta)=\delta u:\delta v$. 由于正交性,

$$d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$$

即

$$Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v=0$$

由于共轭性:

$$d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{n}=0 \text{ 或 } \delta\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}=0$$

即

$$Ldu\delta u+M(du\delta v+dv\delta u)+Ndv\delta v=0$$

以上两个条件改写为

$$(Edu+Fdv)\delta u+(Fdu+Gdv)\delta v=0$$

$$(Ldu+Mdv)\delta u+(Mdu+Ndv)\delta v=0$$

从以上两式消去 δu、δv 得

$$\begin{vmatrix} Edu+Fdv & Fdu+Gdv \\ Ldu+Mdv & Mdu+Ndv \end{vmatrix}=0 \tag{2.35}$$

(2.35)还能写成以下形式

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0 \tag{2.35'}$$

或

$$(EM-FL)du^2+(EN-GL)dudv+(FN-GM)dv^2=0 \tag{2.35''}$$

这是 $du:dv$ 的二次方程，其判别式为

$$\begin{aligned}\Delta&=(EN-GL)^2-4(EM-FL)(FN-GM)\\&=\left[(EN-GL)-\frac{2F}{E}(EM-FL)\right]^2\\&\quad+\frac{4(EG-F^2)}{E^2}(EM-FL)^2\end{aligned}$$

所以当且仅当

$$EN-GL=EM-FL=0 \tag{2.36}$$

时上述判别式 $\Delta=0$，(2.36)可以写成

$$\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N} \tag{2.37}$$

因此除(2.37)的情况外，判别式 $\Delta>0$，这就是说，方程(2.35)″总有两个不相等的实根。因而曲面上每一点处(除了

$$\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N}$$

的情形外)总有两个主方向。它们也是这一点的杜邦指标线的主轴方向。

特别地，如果曲面在某一点处有

$$\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N}$$

这种点称为曲面的脐点。在脐点处(2.35)′是恒等式，因此脐点处的每一方向都是主方向。对于 $L=M=N=0$ 的脐点在前面已经称为平点。因而平点处的每一方向也是主方向。我们把 L、M、N 不同时为零的脐点称为圆点。容易证明球面上的每一点都是圆点。

主方向的判别定理(罗德里格(Rodrigues)定理)

如果方向 $(d)=(du:dv)$ 是主方向，则

$$d\boldsymbol{n}=\lambda d\boldsymbol{r}$$

其中 $\lambda=-k_n$，k_n 是曲面沿方向 (d) 的法曲率。

反之，如果对于方向 (d) 有

$$d\boldsymbol{n}=\lambda d\boldsymbol{r}$$

则 (d) 是主方向，且 $\lambda=-k_n$，k_n 是曲面沿方向 (d) 的法曲率。

证明 先证定理的前半部分：

设 (δ) 是垂直于 (d) 的另一主方向。由 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$，两边微分得 $\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{n}=0$。这关系式说明 $d\boldsymbol{n}$ 在切平面上，于是

$$d\boldsymbol{n}=\lambda d\boldsymbol{r}+\mu\delta\boldsymbol{r}$$

将这等式乘上 $\delta \boldsymbol{r}$，并且注意 $d\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$（这是由于方向$(d)$和$(\delta)$的共轭性），以及 $d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$（这是由于这两方向的正交性），得到

$$\mu(\delta \boldsymbol{r})^2=0$$

因此

$$\mu=0$$

由此

$$d\boldsymbol{n}=\lambda d\boldsymbol{r}$$

再把这等式乘以 $d\boldsymbol{r}$，得

$$d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}=\lambda d\boldsymbol{r}^2$$

由此得

$$\lambda=-\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=-k_n$$

再证定理的后半部分：

设方向(d)满足

$$d\boldsymbol{n}=\lambda d\boldsymbol{r}$$

现在要证明它是主方向．假设方向(δ)垂直于(d)，把等式 $d\boldsymbol{n}=\lambda d\boldsymbol{r}$ 乘上 $\delta\boldsymbol{r}$ 得 $d\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$，这表示方向$(d)$和$(\delta)$是共轭的．

因此(d)和(δ)不仅正交，而且共轭，所以它们都是主方向．

至于 $\lambda=-k_n$ 的证明和定理前半部分相同，我们不再重复．

曲面上一曲线，如果它每一点的切方向都是主方向，则称为**曲率线**，它的方程显然是

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0$$

这方程确定了曲面上两族曲率线，组成曲面上的**曲率线网**．

可以证明，在不含脐点的曲面片上，经过参数的选择，可使曲率线网成为曲纹坐标网，从方程(2.35)通过因式分解，可以得到两

族曲率线的微分方程．它们可以写成

$$A_i du + B_i dv = 0 \qquad (i=1,2)$$

的形式，其中 A_i, B_i 是 u, v 的实函数．设 λ_i 为它们的任何积分因子，则$\lambda_1 A_1 du + \lambda_1 B_1 dv$与$\lambda_2 A_2 du + \lambda_2 B_2 dv$ 为 $\bar{u}$ 与 $\bar{v}$ 的全微分

$$d\bar{u} = \lambda_1 A_1 du + \lambda_1 B_1 dv$$

$$d\bar{v} = \lambda_2 A_2 du + \lambda_2 B_2 dv$$

在曲面的每一点，两个主方向互相垂直，所以曲率线彼此不相切，行列式$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$，即雅科比行列式

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \lambda_1 A_1 & \lambda_1 B_1 \\ \lambda_2 A_2 & \lambda_2 B_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

引进 $\bar{u}, \bar{v}$ 为新的参数，则曲面的曲率线网成为新的曲纹坐标网．

从这个证明还可以看出，曲面上任意一个正规曲线网都可以选为曲纹坐标网．

命题 5 曲面上的曲纹坐标网是曲率线网的充分必要条件是 $F = M = 0$.

证明 $F=0$ 是由于坐标网是正交的，$M=0$ 是由于它们共轭．

例 4 在旋转面 $\boldsymbol{r} = \{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$ 上子午线和平行圆构成了曲率线网．在本章 §1 中已介绍过旋转面的曲纹坐标网是由子午线和平行圆所组成，而且对于旋转面$\boldsymbol{r} = \{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$，我们可以计算出 $F = M = 0$．因此，旋转面上的曲纹坐标网是曲率线网，即旋转面上的子午线和平行圆构成了曲面上的曲率线网．

例 5 球面上每一点都是圆点，平面上每一点都是平点．因此，球面上和平面上的每一条曲线都是曲率线．

3.6 曲面的主曲率、高斯(Gauss)曲率和平均曲率

曲面上一点处主方向上的法曲率称为曲面在此点的**主曲率**.

由于曲面上一点处的主方向是过此点的曲率线的方向，因此主曲率也就是曲面上一点处沿曲率线方向的法曲率.

现在我们要研究在曲面上一点(非脐点)，法曲率随着方向而变化的规律. 还要证明主曲率是法曲率的最大值和最小值.

在曲面S: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上选曲率线网为曲纹坐标网，则$F=M=0$，这时对于曲面的任一方向$(d)=du:dv$，它的法曲率公式就简化成

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{Ldu^2+Ndv^2}{Edu^2+Gdv^2} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}&\text{沿 } u\text{-曲线}(dv=0)\text{的方向对应的主曲率是 } k_1=\frac{L}{E}\\&\text{沿 } v\text{-曲线}(du=0)\text{的方向对应的主曲率是 } k_2=\frac{N}{G}\end{aligned} \tag{2.39}$$

设θ为任意方向$\dfrac{du}{dv}$和u-曲线$(\delta v=0)$方向的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$$

$$=\frac{Edu\delta u}{\sqrt{Edu^2+Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2}}$$

所以

$$\cos^2\theta=\frac{Edu^2}{Edu^2+Gdv^2} \tag{2.40}$$

而

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{Gdv^2}{Edu^2+Gdv^2} \tag{2.41}$$

由于(2.38)可表示为

$$k_n=\frac{L}{E}\frac{Edu^2}{Edu^2+Gdv^2}+\frac{N}{G}\frac{Gdv^2}{Edu^2+Gdv^2}$$

由此把(2.39)，(2.40)，(2.41)代入上式得

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta \tag{2.42}$$

这个公式称为欧拉(Euler)公式. 在脐点这个公式仍然正确,因为这时有 $k_1=k_2$,而沿任意方向的法曲率 $k_n=k_1=k_2$.

欧拉公式表示只要知道了主曲率,则任意方向(d)的法曲率就可以由(d)和 u-曲线的方向之间的夹角 θ 来确定.

以下我们介绍有关主曲率的一个命题:

命题 6 曲面上一点(非脐点)的主曲率是曲面在这点所有方向的法曲率中的最大值和最小值.

证明 设 $k_1<k_2$(如果 $k_1>k_2$,可以交换坐标 u 和 v).

由欧拉公式知

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2(1-\cos^2\theta)=k_2+(k_1-k_2)\cos^2\theta$$

则

$$k_2-k_n=(k_2-k_1)\cos^2\theta\geqslant 0$$

因此

$$k_2\geqslant k_n$$

同样又可以得到

$$k_n-k_1=(k_2-k_1)\sin^2\theta\geqslant 0$$

因此

$$k_n\geqslant k_1$$

即

$$k_1\leqslant k_n\leqslant k_2$$

这就是说,主曲率 k_2, k_1 是法曲率 k_n 的最大值和最小值.

现在我们来导出主曲率的计算公式.

由罗德里格定理,沿主方向(d)有

$$d\boldsymbol{n}=-k_N d\boldsymbol{r}$$

其中 k_N 为主曲率,即 k_1 和 k_2,上式又可以写成

$$\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv=-k_N(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)$$

上式两边分别点乘 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 得

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v dv=-k_N(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v dv)$$
$$\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v dv=-k_N(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v dv)$$

即得到

$$-Ldu-Mdv=-k_N(Edu+Fdv)$$
$$-Mdu-Ndv=-k_N(Fdu+Gdv)$$

整理后，得

$$(L-Ek_N)du+(M-Fk_N)dv=0 \tag{2.43}$$
$$(M-Fk_N)du+(N-Gk_N)dv=0 \tag{2.44}$$

从(2.43)，(2.44)消去 du、dv，则得主曲率的计算公式

$$\begin{vmatrix} L-k_NE & M-k_NF \\ M-k_NF & N-k_NG \end{vmatrix}=0$$

即

$$(EG-F^2)k_N^2-(LG-2MF+NE)k_N+(LN-M^2)=0 \tag{2.45}$$

下面介绍在曲面论的许多问题中起重要作用的两种曲率.

设 k_1、k_2 为曲面上一点的两个主曲率，则它们的乘积 k_1k_2 称为曲面在这一点的**高斯曲率**，通常以 K 表示. 它们的平均数 $\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ 称为曲面在这一点的**平均曲率**，通常以 H 表示. 由方程(2.45)利用二次方程的根与系数的关系，便得

$$\text{高斯曲率 } K=k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

$$\text{平均曲率 } H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$$

对于曲面的特殊参数表示 $z=z(x,y)$，由于

$$E=1+p^2,\quad F=pq,\quad G=1+q^2$$
$$EG-F^2=1+p^2+q^2$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

因此得

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

$$H=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}}$$

例 6 求旋转曲面$\boldsymbol{r}=\{\varphi(u)\cos\theta,\varphi(u)\sin\theta,\psi(u)\}$，$\varphi(u)>0$的高斯曲率和平均曲率.

解 $\boldsymbol{r}=\{\varphi(u)\cos\theta,\ \varphi(u)\sin\theta,\ \psi(u)\}$

$\boldsymbol{r}_u=\{\varphi'\cos\theta,\quad \varphi'\sin\theta,\quad \psi'(u)\}$

$\boldsymbol{r}_\theta=\{-\varphi\sin\theta,\ \varphi\cos\theta,\ 0\}$

$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=\varphi'^2+\psi'^2,\ F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_\theta=0,\ G=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\theta=\varphi^2$

$\sqrt{EG-F^2}=\varphi\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_\theta}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{(-\psi'\cos\theta,\ -\psi'\sin\theta,\ \varphi')}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}$$

$\boldsymbol{r}_{uu}=(\varphi''\cos\theta,\ \varphi''\sin\theta,\ \psi'')$

$\boldsymbol{r}_{u\theta}=(-\varphi'\sin\theta,\ \varphi'\cos\theta,\ 0)$

$\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=(-\varphi\cos\theta,\ -\varphi\sin\theta,\ 0)$

$$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=-\frac{\varphi''\psi'-\varphi'\psi''}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}},\ M=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{u\theta}=0$$

$$N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=\frac{\varphi\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}$$

特别地，取 xOz 平面上最初的曲线为$x=\varphi(z)$，即取坐标 z 作为最初的曲线的参数，那么有

$$z=\psi(u)=u$$

则得

$$L=\frac{-\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}, \quad M=0, \quad N=\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi'^2}}$$

因为 $F=M=0$，所以旋转面的坐标曲线(子午线和纬线)是曲率线，并且主曲率为

$$k_1=\frac{L}{E}=-\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}}$$

$$k_2=\frac{N}{G}=\frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi'^2}}$$

所以曲面在一点的高斯曲率为

$$K=k_1k_2=-\frac{\varphi''}{\varphi(1+\varphi'^2)^2}$$

平均曲率为

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{1+\varphi'^2-\varphi\varphi''}{2\varphi(1+\varphi'^2)^{3/2}}$$

例 7 一个曲面如果它每一点处的平均曲率 $H=0$，称为**极小曲面**(详见本章§6)．可以证明，以空间闭曲线为边界的曲面域中，面积最小的曲面必是极小曲面，即平均曲率为零的曲面．极小曲面的实际模型是将在空间中弯曲的铅丝浸入肥皂溶液中，取出时所得的皂膜曲面．

现在我们要求出极小旋转曲面，即求出 $H=0$ 的旋转曲面．

由例 6 中可知

$$H=\frac{1+\varphi'^2-\varphi\varphi''}{2\varphi(1+\varphi'^2)^{3/2}}=0$$

所以

$$1+\varphi'^2-\varphi\varphi''=0$$

由此得

$$\frac{\varphi''\varphi'}{1+\varphi'^2}=\frac{\varphi'}{\varphi}$$

即

$$\frac{1}{2}\{\ln(1+\varphi'^2)\}'=(\ln\varphi)'$$

积分后我们得到

$$\varphi=a\sqrt{1+\varphi'^2}, \qquad a=常数$$

或者

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{\frac{\varphi^2}{a^2}-1}}=1$$

上式可以变成

$$\left\{\ln\left(\frac{\varphi}{a}+\sqrt{\frac{\varphi^2}{a^2}-1}\right)\right\}'=\frac{1}{a}$$

积分后得

$$\ln\left(\frac{\varphi}{a}+\sqrt{\frac{\varphi^2}{a^2}-1}\right)=\frac{z}{a}$$

即

$$\varphi(z)=\frac{a}{2}(e^{z/a}+e^{-z/a})$$

这里省去了积分常数，因为它只不过表示沿平行于旋转轴的平移而已.

因此曲面是由悬链线

$$x=\frac{a}{2}(e^{z/a}+e^{-z/a})$$

旋转而成. 称为悬链面. 在形状上它很象压扁了的单叶双曲旋转面.

3.7 曲面在一点邻近的结构

为了研究曲面的弯曲性，我们注意到高斯曲率K与$LN-M^2$是同号的，这是因为

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

上式中分母总是正的(因 $EG-F^2=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2>0$). 因此$K$的符号由 $LN-M^2$ 的符号来确定. 从而, $K>0$ 的点是椭圆点, $K<0$ 的点是双曲点, $K=0$ 的点是抛物点或平点.

现在我们分别讨论曲面在每一类点的邻近的情况:

1° 椭圆点

$$K>0 \quad 或 \quad LN-M^2>0$$

这时主曲率 k_1、k_2 同号, 即 $k_1>0$, $k_2>0$ 或 $k_1<0$, $k_2<0$.

适当地选择曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$, 我们可以只考虑 k_1 和 k_2 都大于零的情形.

根据欧拉公式

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$$

所以曲面的任意方向的法曲率都大于零. 而 k_n 就是相应的法截线的曲率.

以上说明了曲面沿所有方向都朝同一侧弯曲.

由于主曲率 $k_1>0$, $k_2>0$, 这就是说主方向上的两个法截线的曲率分别为 k_1 和 k_2, 这两个法截线都是平面曲线. 根据第一章§5的结果知道它们的近似曲线的方程分别为

$$y=\frac{k_1}{2}x^2, \qquad y=\frac{k_2}{2}x^2$$

这是两条抛物线. 由此可以看出曲面在椭圆点邻近的形状近似于椭圆抛物面(图 2-17).

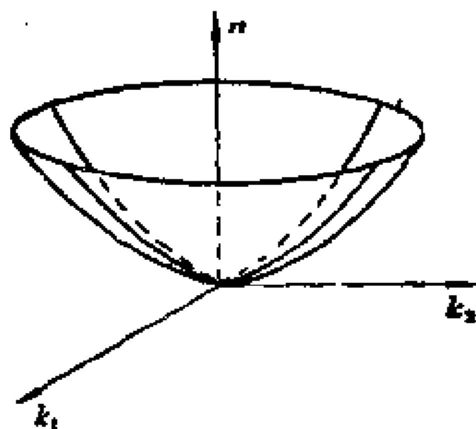


图 2-17

2° 双曲点

$$K<0 \quad 或 \quad LN-M^2<0$$

这时主曲率 k_1、k_2 异号．适当地选择曲面的法向量 n 后有

$$k_1<0,\quad k_2>0$$

因此对应于主方向的两条法截线中有一条朝 n 的反向弯曲，另一条朝 n 的正向弯曲．

根据欧拉公式

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$$

得到各个方向的法曲率 k_n 的变化情况如下表：

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
k_n	$k_1\nearrow$	$0\nearrow$	$k_2\searrow$	$0\searrow$	$k_1\nearrow$	$0\nearrow$	$k_2\searrow$	$0\searrow$	k_1

由此可以看出，法曲率在四个方向上为零，它们就是双曲点的渐近方向(图 2-18)，也就是杜邦指标线的渐近线的方向．

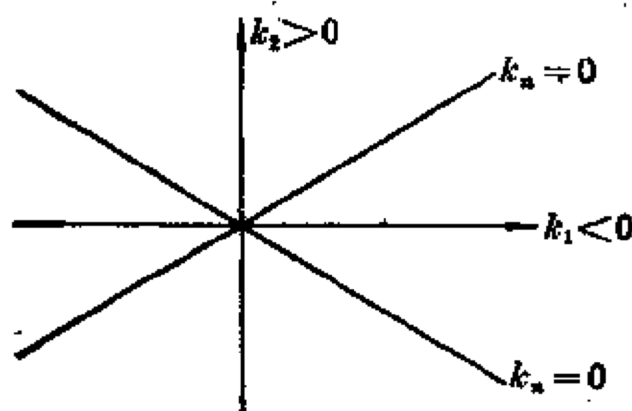


图　2-18

我们进一步用欧拉公式可以求出渐近方向所对应的 θ 值．

由于

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta=0$$

所以

$$\operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

即

$$\theta=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

渐近方向的两对对顶角中，一对对顶角包含具有 $k_n<0$ 的法截线的方向，对于这些方向曲面朝 n 的反向弯曲．另一对对顶角包含具有 $k_n>0$ 的法截线的方向，对于这些方向曲面朝 n 的正向弯曲．

现在我们来观察主方向上法截线的形状，它们分别近似于抛物线：

$$y=\frac{k_1}{2}x^2 \qquad (k_1<0)$$

$$y=\frac{k_2}{2}x^2 \qquad (k_2>0)$$

其中前一个朝 n 的反向弯曲，后一个朝 n 的正向弯曲．因此，曲面在双曲点邻近的形状，近似于双曲抛物面(马鞍面)(图 2-19)．

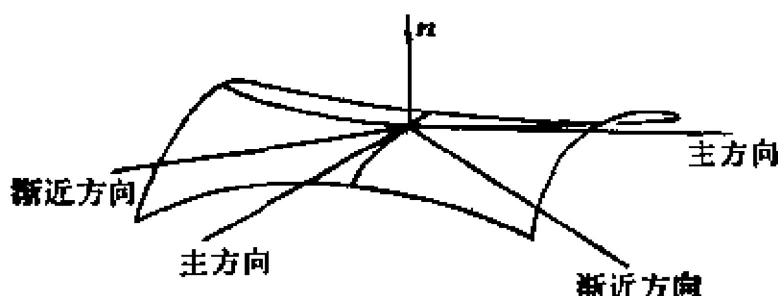


图 2-19

3° 抛物点

$$K=0 \quad 或 \quad LN-M^2=0$$

这时 k_1、k_2 中至少有一个等于零．适当选取法向量 n 后有

$$k_1<0,\ k_2=0$$

因此对应于主方向的两条法截线中有一条朝 n 的反向弯曲，另一个主方向是渐近方向．由于这时除 $k_2=0$ 外，k_n 总是取负值，因而除渐近方向外，一切法截线都朝 n 的反向弯曲．

根据第一章§5的结果，主方向上法截线的形状分别近似于

$$y=\frac{k_1}{2}x^2$$

$$y=\frac{\dot{k}_2}{6}x^3$$

其中前一个由于 $k_1<0$，因此是朝 n 的反向弯曲的抛物线，后一个为立方抛物线（图 2-20）。

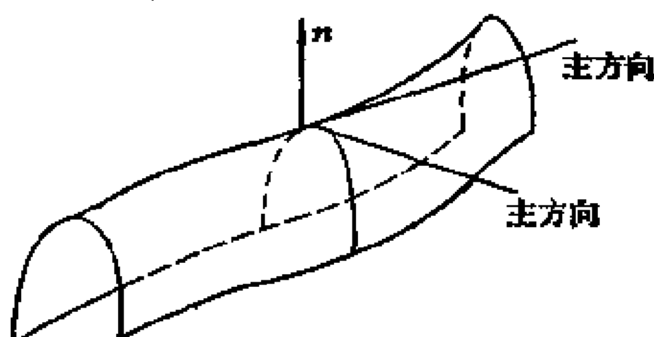


图 2-20

对于平点来说 $L=M=N=0$，因此主曲率 $k_1=k_2=0$，这时主方向上两条法截线的形状都近似于立方抛物线：

$$y=\frac{1}{6}\dot{k}_1x^3$$

$$y=\frac{1}{6}\dot{k}_2x^3$$

3.8 高斯曲率的几何意义

从以上的讨论我们了解到高斯曲率的值所给出的对于曲面的一般弯曲性的分析是从各个方向的法曲率分布概括出来的．如果不利用关于曲面曲线的研究结果，而直接讨论高斯曲率的几何意义，就可以更明显地说明上述事实．为此我们先介绍曲面的球面表示．

设 σ 是曲面 S：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ 上一块不大的区域，另外再作一单位球面．现在我们建立 σ 中的点和单位球面上的点的一一对应关系如下：σ 中任取一点 $P(u, v)$，作曲面在 P 点处的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u, v)$，然后把 $\boldsymbol{n}$ 的始端平移到单位球的中心，则 $\boldsymbol{n}$ 的另一端

点就在单位球面上. 设该点为P'，这样对于曲面的小区域σ中的每一点$\boldsymbol{r}(u, v)$，$(u, v)\in\sigma$与球面上向径为$\boldsymbol{n}(u, v)$的唯一的点对应. 因此，曲面上所给出的小区域σ单值地表示到单位球面的对应区域σ^*上. 这就是说，建立了曲面的小区域σ到单位球面上区域σ^*的一一对应(由于取区域σ充分小，因而可以使此对应是一一的)，我们把曲面上的点与球面上的点的这种对应称为曲面的**球面表示**(图 2-21)，也称为**高斯映射**.

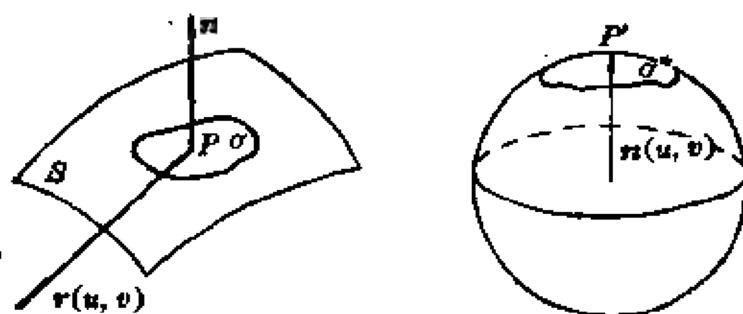


图 2-21

当P点在曲面S上描出一曲线时，通过球面表示它的对应点P'在单位球面上也描出对应的曲线. 因此，当P点在曲面上描出一微小弧ds时，P'点在球面上也描出一微小弧ds^*.

定义 曲面的**第三基本形式**为

$$\mathrm{III}=ds^{*2}=d\boldsymbol{n}^2=edu^2+2fdudv+gdv^2$$

换言之，曲面的球面表示的第一基本形式叫做原曲面的第三基本形式.

由于

$$\begin{aligned}\mathrm{III}=d\boldsymbol{n}^2&=(\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv)^2\\&=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u du^2+2\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v dudv+\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v dv^2\end{aligned}$$

所以

$$e=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,\quad f=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,\quad g=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v$$

e、f、g叫做曲面的**第三类基本量**.

以下证明第三基本形式III可以用第一和第二基本形式来表

示．为此，我们选取曲率线网为坐标网，则曲面S的第一、第二基本形式可以写成

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= E du^2 + G dv^2 \\ \mathrm{II} &= L du^2 + N dv^2 \end{aligned} \tag{2.46}$$

由于我们选取了曲率线网为坐标网，故$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$分别为主方向，设k_1、k_2分别为u-曲线方向和v-曲线方向的主曲率，则根据罗德里格定理

$$\boldsymbol{n}_u = -k_1 \boldsymbol{r}_u, \quad \boldsymbol{n}_v = -k_2 \boldsymbol{r}_v$$

由此可得

$$\begin{aligned} e &= \boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n}_u = k_1^2 \boldsymbol{r}_u^2 = k_1^2 E \\ f &= \boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = k_1 k_2 \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = 0 \\ g &= \boldsymbol{n}_v \cdot \boldsymbol{n}_v = k_2^2 \boldsymbol{r}_v^2 = k_2^2 G \end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{III} = k_1^2 E du^2 + k_2^2 G dv^2 \tag{2.47}$$

同时

$$\begin{aligned} L &= -\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{r}_u = k_1 \boldsymbol{r}_u^2 = k_1 E \\ N &= -\boldsymbol{n}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = k_2 \boldsymbol{r}_v^2 = k_2 G \end{aligned}$$

因而

$$\mathrm{II} = k_1 E du^2 + k_2 G dv^2 \tag{2.48}$$

从(2.46)，(2.47)，(2.48)得到

$$\mathrm{III} - (k_1 + k_2)\mathrm{II} + k_1 k_2 \mathrm{I} = 0$$

由于高斯曲率$K = k_1 k_2$，平均曲率$H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$，因而曲面的三个基本形式之间有如下的线性关系：

$$\mathrm{III} - 2H\mathrm{II} + K\mathrm{I} = 0$$

因为三个基本形式与H、K都跟坐标曲线的选择无关，所以这个关系式对于曲面的任何坐标都成立。

这样我们证明了曲面的第三基本形式可以由第一、第二基本形式来表示.

现在我们研究高斯曲率的几何意义. 曲面的小区域 σ 在球面表示(高斯映射)下对应到球面的区域 σ^*. 如果当曲面在这块 σ 上弯曲的程度越大时, 它的对应球面区域 σ^* 也就越大. 因而 σ 的弯曲程度可以用 σ^* 的面积对于 σ 本身的面积的比值来刻画. 曲面在已知点处的弯曲程度自然就用这个比值当 σ 收缩成点 P 时的极限来衡量. 以下我们要证明这个极限就等于在 P 点的高斯曲率的绝对值.

命题 7 曲面上 P 点邻近的区域 σ 在单位球面上的表示是 σ^*, σ^* 的面积与区域 σ 的面积之比, 当 σ 趋于曲面上已知点 P 时, 这个比值趋于曲面在 P 点的高斯曲率的绝对值. 即

$$|K_P|=\lim_{\sigma\to P}\frac{\sigma^*\text{ 的面积}}{\sigma\text{ 的面积}}$$

证明 由本章 § 2 的(2.25)有

$$\sigma\text{ 的面积}=\iint_{\bar\sigma}|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv \qquad (2.49)$$

$$\sigma^*\text{ 的面积}=\iint_{\bar\sigma}|\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v|\,du\,dv \qquad (2.50)$$

等式左边的积分区域 $\bar\sigma$ 为曲纹坐标 u, v 的变化区域, 而 u, v 同时为这两个积分中的变数.

此外由于向量积

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v \quad 和 \quad \boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v$$

分别是曲面与球面的法向量, 且因对应法线互相平行, 所以

$$\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v=\lambda(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v) \qquad (2.51)$$

为确定因子 λ, 两边点乘向量 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$

$$(\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v)\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)=\lambda(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)$$

根据拉格朗日恒等式有

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \end{vmatrix}$$

即

$$LN-M^2=\lambda(EG-F^2)$$

由此得

$$\lambda=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=K$$

代入(2.51)则有

$$\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v=K(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v) \tag{2.52}$$

把

$$|\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v|=|K|\,|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$$

代入(2.50)得

$$\sigma^* \text{ 的面积}=\iint_\sigma |K|\,|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,dudv$$

应用二重积分的中值定理，就有

$$\sigma^* \text{ 的面积}=|K_Q|\iint_\sigma |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,dudv=|K_Q|\cdot(\sigma \text{ 的面积})$$

其中 K_Q 表示高斯曲率在区域 σ 中某一内点 Q 的值.

现在让区域 σ 趋于点 P, 这时点 Q 也趋于 P, 于是从上式得

$$\lim_{\sigma\to P}\frac{\sigma^* \text{ 的面积}}{\sigma \text{ 的面积}}=\lim_{\sigma\to P}|K_Q|=\lim_{Q\to P}|K_Q|=|K_P|$$

由此得到曲面在 P 点的高斯曲率的绝对值的几何意义是单位球面上的区域 σ^* 的面积与曲面上的对应区域 σ 的面积之比值，当 σ 趋于 P 时的极限.

以下给出在球面表示时高斯曲率的符号的几何意义. 由于

$$\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v=K(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)$$

其中 $r_u\times r_v$ 是曲面的法向量，$n_u\times n_v$ 是球面的法向量.

$K>0$ 表示这两法向量指向一致，因此从 r_u 到 r_v 的旋转方向和 n_u 到 n_v 的旋转方向相同. $K<0$ 表示这两法向量的方向相反，从而 r_u 到 r_v 的旋转方向和从 n_u 到 n_v 的旋转方向相反。

习 题

1 计算悬链面

$$r=\{\cosh u\cos v,\ \cosh u\sin v,\ u\}$$

的第一、第二类基本量.

2 计算抛物面 $2x_3=5x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$ 在原点的第一、第二基本形式.

3 证明对于正螺面

$$r=\{u\cos v,\ u\sin v,\ bv\},\ -\infty<u<+\infty,\ -\infty<v<+\infty$$

处处有 $EN-2FM+GL=0$.

4 求出抛物面 $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$ 在 $(0,0)$ 点和方向 $(dx:dy)$ 的法曲率.

5 利用法曲率公式 $k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ 证明在球面上对于任何曲纹坐标第一、二类基本量成比例.

6 求证在正螺面上有一族渐近线是直线，另一族是螺旋线.

7 求曲面 $z=xy^2$ 的渐近线.

8 证明在曲面 $z=f(x)+g(y)$ 上曲线族 $x=$ 常数，$y=$ 常数构成共轭网.

9 确定螺旋面 $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=cv$ 上的曲率线.

10 找出双曲面 $z=axy$ 上的曲率线.

11 求曲面 $r=\left\{\frac{a}{2}(u-v),\ \frac{b}{2}(u+v),\ \frac{uv}{2}\right\}$ 上的曲率线的方程.

12 给出曲面上一条曲率线 Γ，设 Γ 上每一处的副法向量和曲面在该点处的法向量成定角. 求证 Γ 是一平面曲线.

13 如果一曲面的曲率线的密切平面与切平面交成定角，则它是平面曲线.

14 求正螺面的主曲率.

15 确定抛物面 $z=a(x^2+y^2)$ 在 $(0,0)$ 点的主曲率.

16　证明在曲面上给定点处，沿相互成为直角的方向的法曲率之和为常数.

17　证明若曲面的两族渐近曲线交于定角，则主曲率之比为一个常数.

18　求证正螺面的平均曲率为零.

19　找出双曲面 $z=axy$ 在点 $x=y=0$ 的平均曲率和高斯曲率.

20　证明曲面为球面或平面的充分必要条件是 $H^2=K$.

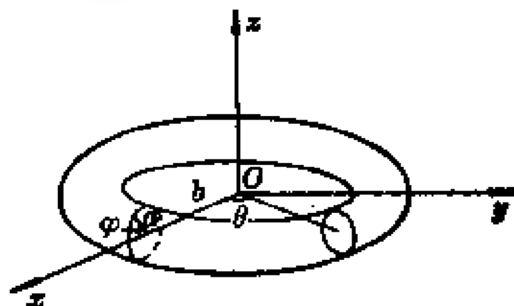
21　证明极小曲面上的点都是双曲点或平点.

22　求证如果曲面的平均曲率为零，则渐近线构成正交网.

23　在 xOz 平面上取圆周 $y=0$，$(x-b)^2+z^2=a^2$ $(b>a)$，并令其绕 z 轴旋转得圆环面. 圆环面的参数方程是

$$r=\{(b+a\cos\varphi)\cos\theta,\quad (b+a\cos\varphi)\sin\theta, a\sin\varphi\}$$

$(0\leqslant\varphi<2\pi, 0\leqslant\theta<2\pi)$，求圆环面上的椭圆点，双曲点和抛物点.



(第 23 题)

§4　直纹面和可展曲面

4.1　直纹面

由直线的轨迹所成的曲面称为**直纹面**，这些直线称为直纹面的**直母线**. 柱面、锥面、单叶双曲面(纸篓面)、双曲抛物面(马鞍面)、空间曲线的切线曲面等都是直纹面. 现在我们来导出直纹面的参数表示.

直纹面上取一条曲线(C)，它的参数表示是

$$a=a(u)$$

曲线(C)和所有直母线相交，即过曲线(C)的每一点 $u=u_0$，有一直母线，曲线(C)称为直纹面的**导线**.

设 $\boldsymbol{b}(u)$ 是过导线(C)上 $\boldsymbol{a}(u)$ 点的直母线上的单位向量．导线(C)上 $a(u)$ 点到直母线上任一点 $P(u,v)$ 的距离为 v(图 2-22)，则向径 $\overrightarrow{OP}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u) \tag{2.53}$$

这就是直纹面的参数表示。

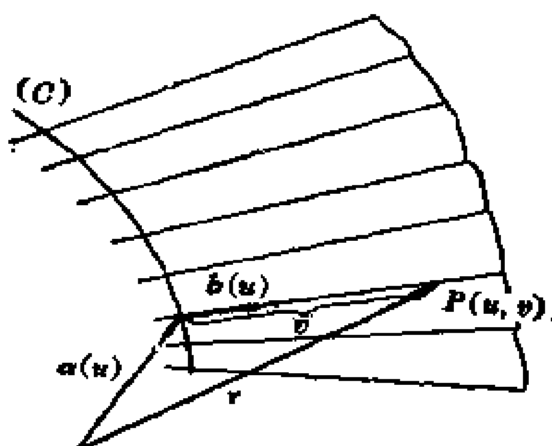


图 2-22

由(2.53)可以看出直纹面的v-曲线($u=$常数)是直母线，u-曲线($v=$常数)是和导线(C)平行的曲线．

我们来计算直纹面上任一点 $P(u,\ v)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}$．它平行于 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$，从(2.53)容易算出：

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{a}'(u)+v\boldsymbol{b}'(u),\quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{b}(u)$$

所以

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+v\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$$

我们现在来讨论当 P 点在曲面上沿一条直母线移动时，法向量 $\boldsymbol{n}$ 的变化情况：

情形 1：$\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}\nparallel\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$，即$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\neq0$．

这时当 P 点在一条直母线上移动时，参数 v 随 P 点的变动而变化，因此法向量 $\boldsymbol{n}$(或切平面)绕直母线而旋转．

情形 2：$\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$，即$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$．

这时当 P 点沿一条直母线移动时，虽然 v 变化了，但是$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$

只改变长度，不改变方向．也就是说 $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$ 保持不变．这说明 P 点沿直母线移动时，它的法向量（或切平面）不变，此时直纹面沿一条直母线有同一个切平面．

对于直纹面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$ 有 $\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{b}(u)$，所以曲面在 P 点的沿方向 $\boldsymbol{r}_v$ 的法截线就是直母线，这是一条直线，它的曲率为零．根据梅尼埃定理 $k_n=k\cos\theta$，因此 P 点在方向 $\boldsymbol{r}_v$ 上的法曲率 $k_n=0$．根据以前的讨论，只当 P 点是双曲点或抛物点时才可能出现 $k_n=0$ 的情形．这说明了直纹面上高斯曲率 $K\leqslant 0$．

下面我们将指出对于情形 1 有 $K<0$；对于情形 2 有 $K=0$．

由直纹面的参数表示

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$$

得到

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{a}''+v\boldsymbol{b}'',\quad \boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{b}',\quad \boldsymbol{r}_{vv}=0$$

单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+v\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

由此得第二类基本量为

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$=\frac{(\boldsymbol{b}'',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b})v^2+[(\boldsymbol{a}'',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}'',\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})]v+(\boldsymbol{a}'',\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

再计算高斯曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-(\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})^2}{(EG-F^2)^2}$$

因而对于情形 1，$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\neq 0$ 有高斯曲率 $K<0$．而对于情形 2，

$(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}')=0$ 有 $K=0$。

我们已经知道对于法曲率 k_n 有 $k_n=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$，又因为沿着直纹面的直母线有 $k_n=0$，所以有 $\mathrm{II}=0$，因此直纹面的直母线一定是渐近线。

我们要考虑两条无限邻近的直母线的相互位置。

先定义直纹面的腰曲线。

设 l 是过导线上点 $\boldsymbol{a}(u)$ 的直母线，l' 是过导线上 $\boldsymbol{a}(u)$ 的邻近点 $\boldsymbol{a}(u+\Delta u)$ 的直母线，作 l 和 l' 的公垂线(图 2-23)，垂足分别

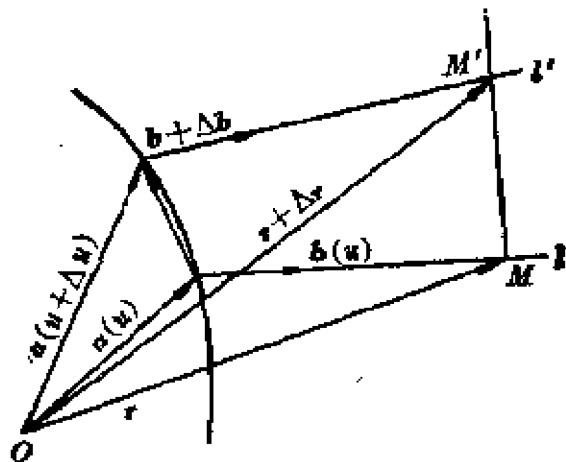


图 2-23

为M和M'，公垂线MM' 的垂足M当 $\Delta u\to 0$时沿直母线趋近于极限位置M_0，点 M_0 称为直母线 l 上的腰点. 下面我们导出腰点的向径表达式.

垂足M, M' 所对应的向径为

$$M:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$$

$$M':\ \boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a}+(v+\Delta v)(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})$$

由以上两式得到

$$\overrightarrow{MM'}=\Delta\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{a}+v\Delta\boldsymbol{b}+\Delta v(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}) \qquad (2.54)$$

又因为$\overrightarrow{MM'}$ 是两直母线的公垂线，所以垂直于 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$，因而垂直于 $\Delta\boldsymbol{b}$，这样有

$$\overrightarrow{MM'}\cdot\Delta\boldsymbol{b}=0$$

把(2.54)代入得

$$\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}+v\Delta\boldsymbol{b}\cdot\Delta\boldsymbol{b}+\Delta v(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})\cdot\Delta\boldsymbol{b}=0$$

上式除以$(\Delta u)^2$

$$\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta u}+v\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta u}+\frac{\Delta v}{\Delta u}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta u}=0 \qquad (2.55)$$

当 $\Delta u\to 0$ 时，我们考虑MM'的极限位置．在这里我们假设$\boldsymbol{b}'(u)\neq\boldsymbol{0}$(对于$\boldsymbol{b}'(u)=\boldsymbol{0}$的情形在以后讨论)．

注意当 $\Delta u\to 0$ 时有

$$\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta u}\to\boldsymbol{a}',\qquad \frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta u}\to\boldsymbol{b}'$$

$$\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta u}\cdot\Delta\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{b}'\cdot 0=0,\quad \boldsymbol{b}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta u}\to\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}'=0$$

这时(2.55)式为

$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'+v\boldsymbol{b}'^2=0$$

因而

$$v=-\frac{\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'}{\boldsymbol{b}'^2}$$

把它代入到$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$后得到腰点的向径表达式:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)-\frac{\boldsymbol{a}'(u)\cdot\boldsymbol{b}'(u)}{\boldsymbol{b}'(u)^2}\boldsymbol{b}(u) \qquad (2.56)$$

总之在直纹面的每一条直母线上(假定$\boldsymbol{b}'(u)\neq\boldsymbol{0}$)有一个腰点，这些腰点的轨迹称为**腰曲线**．在方程(2.56)中以u为参数，则它表示腰点向径的变动与参数u有关，也就是与母线的选择有关．因此(2.56)就是腰曲线的参数方程．腰曲线的几何意义是它沿直纹面的狭窄部位“围绕着”这直纹面．若我们取腰曲线为导线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)$，则在(2.56)中腰曲线的向径$\boldsymbol{r}$就是导线的向径$\boldsymbol{a}$，因此得到腰曲线是导线的充分必要条件是$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=0$即$\boldsymbol{a}'\perp\boldsymbol{b}'$．

4.2 可展曲面

在§4.1中，我们把直纹面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$ 分为两种情形：

1° $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}\not\parallel\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$，即 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\neq 0$；

2° $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$，即 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$.

对于第2°种情形的直纹面我们称为**可展曲面**，也就是说，可展曲面是沿一条直母线有同一个切平面的直纹面.

命题1 每一个可展曲面或是柱面，或是锥面，或是一条曲线的切线曲面.

证明 对于可展曲面有 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$，我们取腰曲线为导线，即此时有 $\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=0$.

i) 当 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}(u)=$ 常向量，这表示腰曲线退化为一点，也就是说，各条直母线上的腰点都重合. 我们得到以所有母线上公共的腰点为顶点的锥面(图2-24).

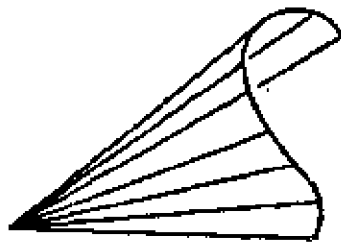


图 2-24

ii) 当 $\boldsymbol{a}'\neq\boldsymbol{0}$ 时，由条件 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$，$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=0$ 并且 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}'$ 得到 $\boldsymbol{a}'\parallel\boldsymbol{b}$. 这时得到切于腰曲线的切线曲面(图2-25).

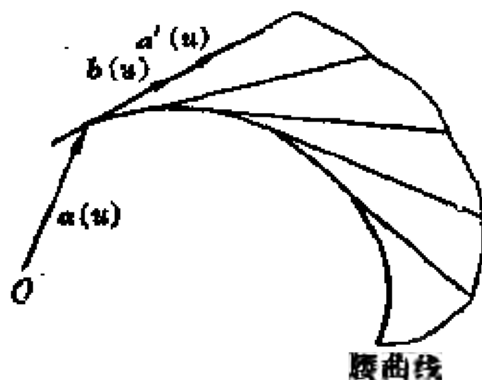


图 2-25

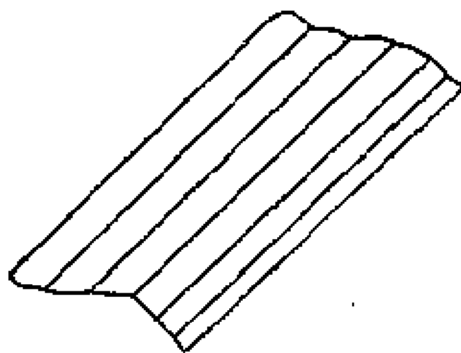


图 2-26

iii) 当 $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{b}(u)=$ 常向量，这表示柱面(图2-26).

反过来也成立，即：

每一柱面、锥面或任意空间曲线的切线曲面是可展曲面(证明

留作习题).

为了进一步研究可展曲面，我们先介绍单参数曲面族的包络的概念.

给出一个单参数曲面族

$$\{S_\alpha\}:\ F(x, y, z, \alpha)=0 \tag{2.57}$$

其中 α 是参数. 当 α 的值变化时，我们得到族中不同的曲面 S_α，并且假定函数 $F(x, y, z, \alpha)$ 具有一阶与二阶连续偏导数.

如果有一个曲面 S，它的每一点是 $\{S_\alpha\}$ 族中一个曲面 S_α 的点，而且在 S 与 S_α 的公共点它们有相同的切平面，则 S 称为单参数曲面族 $\{S_\alpha\}$ 的包络.

现在假定曲面族 $\{S_\alpha\}$ 的包络 S 存在，则根据上述定义，S 上任意点 $P(x, y, z)$ 必在族中某一个曲面上，而这个曲面由参数 α 来确定，所以包络 S 上每一点对应于 α 的一个确定值. 因而 α 为 S 上点的坐标 (x, y, z) 的函数:

$$\alpha=\alpha(x, y, z) \tag{2.58}$$

把它代入(2.57)得

$$F[x, y, z, \alpha(x, y, z)]=0 \tag{2.59}$$

对于 S 上的点，上式为恒等式.

其次在包络 S 上任取一条曲线 (C):

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)\ \text{即}\ \boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$$

因为曲线 (C) 上的坐标应满足(2.59)式，所以必满足恒等式:

$$F[x(t), y(t), z(t), \alpha(t)]\equiv 0$$

对于 t 求导数得

$$F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}+F_\alpha\frac{d\alpha}{dt}=0 \tag{2.60}$$

现在，在曲线 (C) 上取一点 P. 由于 S 与 S_α 在 P 点有相同的切平面，曲线 (C) 在 P 点的切线和 S_α 在 P 点的法线垂直，即

$$F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}=0^{*)} \tag{2.61}$$

比较(2.60)和(2.61)便得

$$F_\alpha\frac{d\alpha}{dt}=0 \tag{2.62}$$

这对包络 S 上每条曲线都成立。

因为曲线(C)可以在包络面上任意选择，使得$\frac{d\alpha}{dt}\neq 0$，因此

$$F_\alpha=0$$

即

$$F_\alpha[x, y, z, \alpha(x, y, z)]=0 \tag{2.63}$$

由以上的分析，说明了曲面族(2.57)的包络 S 满足方程组

$$\begin{cases}F(x, y, z, \alpha)=0\\ F_\alpha(x, y, z, \alpha)=0\end{cases} \tag{2.64}$$

换言之，对于包络 S 上的每一点(x, y, z)，可以找到这样的值 α，使四个数 x, y, z, α 满足方程组(2.64)。

从方程组(2.64)消去 α，则得到具有下列形式的方程

$$\varphi(x, y, z)=0$$

这个方程所表示的曲面 S^* 叫做曲面族(2.57)的判别曲面。

我们假定在族中的曲面上的点和在包络上的点都是正常点的情况．在这种情况下，我们可以证明判别曲面 S^* 就是包络面 S．判别曲面 S^* 可以这样理解：对于每一个固定的 α，方程组(2.64)代表曲面 S_α 和曲面 $F_\alpha=0$ 的交线 C_α，而判别曲面 S^* 是这些曲线

---

*) 对于曲面 $F(x, y, z)=0$，在曲面上过 P_0 点取一曲线 $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$，于是有 $F(x(t), y(t), z(t))=0$，两端对 t 取导数得 $F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}=0$ 即$(F_x, F_y, F_z)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$，但上述曲线为曲面上过$P_0$ 点的任意曲线，故上式中$\boldsymbol{r}'(t)$为曲面上过P_0 点的任意方向的切向量．因此(F_x, F_y, F_z) 是曲面在P_0 点的法线上的一向量。

C_α 所产生的曲面. 因此, S^* 上每一点决定一个 α 值 $\alpha^*(x, y, z)$, 而点的坐标以及其所对应的 α^* 值适合(2.64). 但上面已经得到包络 S 上每一点和它所对应的 α 值适合(2.64), 因而包络 S 属于判别曲面 S^*.

下面再证明判别曲面 S^* 属于包络 S.

由于判别曲面上每一个点都在族中某一曲面上, 因此它的坐标对 α 的某个值满足方程

$$F(x, y, z, \alpha)=0$$

我们在判别曲面上过一点 P 任取一条曲线(C): $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$, 代入方程组(2.64)的第一式, 然后关于 t 求导数, 则有

$$F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}+F_\alpha\frac{d\alpha}{dt}=0$$

但根据方程组(2.64)的第二式, $F_\alpha=0$, 所以

$$F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}=0$$

这就是说, 在 P 点 S_α 的法线和 S^* 上曲线(C) 的切向量垂直. 但(C)为 S^* 上经过 P 点的任意曲线, 由此可知, S_α 与 S^* 在 P 相切, 这说明了 S^* 的点也是 S 的点, 即 S^* 属于包络 S. 这样, 我们证明了 S^* 就是$\{S_\alpha\}$的包络 S.

包络 S 与族中的曲面 S_α 相切的曲线称为**特征线**. 因而当 α 固定时, (2.64)为特征线的方程. 特征线的轨迹就是包络. 这就是说族中每一曲面沿特征线切于包络.

我们把这些理论应用于单参数的平面族, 有以下命题.

命题 2 一个曲面为可展曲面的充分必要条件是此曲面为单参数平面族的包络.

证明 设单参数平面族的方程为

$$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0 \tag{2.65}$$

其中 A、B、C、D 是与平面族的参数 α 有关的系数.

我们求出所给平面族中的平面上的特征线. 根据前述理论, 为了求出(2.65)的包络, 除方程(2.65)以外还必须把(2.65)左端对参数 α 微分而得方程

$$A'(\alpha)x+B'(\alpha)y+C'(\alpha)z+D'(\alpha)=0 \tag{2.66}$$

(2.65)和(2.66)联立.

$$\begin{cases}A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0\\A'(\alpha)x+B'(\alpha)y+C'(\alpha)z+D'(\alpha)=0\end{cases} \tag{2.67}$$

则方程组(2.67)在族中的平面上决定一条直线, 这就是特征线. 而包络是这些直线——特征线的轨迹, 即包络为直纹面.

以下再证明此包络面不仅是直纹面而且还是可展曲面.

由于包络面沿特征线(即沿它的直母线)与族中曲面(即族(2.65)中的某一平面)相切(图 2-27), 所以此平面是直母线上所有点的公共切平面. 因此按可展曲面的定义, 这个包络面是可展曲面.

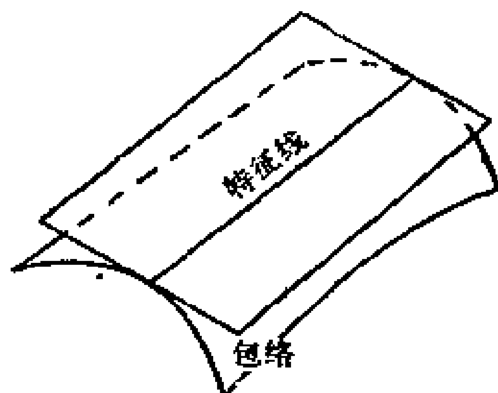


图 2-27

反之, 我们证明每一可展曲面是某一单参数平面族的包络.

由于可展曲面的直母线族与单参数有关, 而且经过给定的母线, 可引唯一的切平面, 因此所有切于可展曲面的切平面族是仅与一个参数有关(而任意曲面的切平面族与两个参数有关), 这就是说可展曲面在它的每一点处切于它的单参数切平面族中的某一平面. 这就表示它是这个平面族的包络.

在 § 4.1中我们通过计算得到可展曲面的高斯曲率等于零. 现在我们再从理论上证明以下命题:

命题 3 一个曲面为可展曲面的充分必要条件是它的高斯曲

率恒等于零.

证明 如果曲面是可展的，则沿同一直母线的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 不变，即 $d\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$，零向量与任意另外的向量共线，因此有

$$d\boldsymbol{n} \parallel d\boldsymbol{r}$$

根据罗德里格定理，沿直母线的方向是主方向，并且主曲率 $k_1=0$(或 $k_2=0$)，于是

$$K=k_1k_2\equiv 0$$

反之，如果 $K\equiv 0$，由本章 § 3.7，在曲面上只有一族渐近曲线，而且这时渐近方向也是主方向. 所以这一族渐近曲线也是曲率线，其对应的主曲率 $k_2=0$.

根据罗德里格定理沿渐近曲线有

$$d\boldsymbol{n}=-k_2d\boldsymbol{r}$$

因而

$$d\boldsymbol{n}=0$$

即

$$\boldsymbol{n}=\text{常向量}$$

这说明单位法向量沿渐近曲线保持常向量. 因此，在所有渐近曲线上曲面的法线都互相平行.

又对于渐近曲线的切向量 $d\boldsymbol{r}$ 有

$$d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

所以沿渐近曲线有

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=\text{常量}$$

设 $\boldsymbol{r}_0$ 是渐近曲线上某定点 M_0 的向径，则由以上结果有

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}$$

即

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$$

由此得到连结渐近曲线上的定点 M_0 和渐近曲线上任意点的向量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$，因而必在点 M_0 的切平面上. 所以渐近曲

线的所有点都在点M_0的切平面上.

于是，这个包含渐近曲线而且垂直于沿它的常法向量$\boldsymbol{n}$的平面，就是渐近曲线所有点的切平面. 换句话说，对同一条渐近曲线上的点，其切平面是同一个. 由此可见，曲面是一个单参数平面族的包络面，因而是可展曲面.

以下我们再证明一个命题，它刻划了任何曲面上曲率线的特征.

命题 4 曲面上的曲线是曲率线的充分必要条件是沿此曲线的曲面的法线组成一可展曲面.

证明 设曲面上的曲线$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(s)$是曲率线，则根据罗德里格定理可知

$$d\boldsymbol{n}=-k_1 d\boldsymbol{a}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{n}}(s)=-k_1(s)\dot{\boldsymbol{a}}(s)$$

其中$k_1(s)$为对应的主曲率. 由此得出

$$\dot{\boldsymbol{n}}\,/\!/\,\dot{\boldsymbol{a}}$$

所以有

$$(\dot{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{n}})=0$$

因而沿此曲线，曲面的法线组成的曲面

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{n}$$

是可展曲面.

反之，设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(s)$是曲面上一曲线. 曲面沿此曲线的法线构成一可展曲面

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{n}$$

则有

$$(\dot{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{n}})=0$$

由于$\boldsymbol{n}$是单位向量，所以$\boldsymbol{n}\perp\dot{\boldsymbol{n}}$. 而且$\dot{\boldsymbol{a}}$是曲面的切向量，因而

$\dot{a}\perp n$. 由此可得

$$\dot{a}\,/\!/\,\dot{n} \text{ 或 } da\,/\!/\,dn$$

根据罗德里格定理，da 是主方向．因此曲线 $a=a(s)$ 是曲面的曲率线．

可展曲面的特征之一是它可以与平面成等距对应．我们以下证明：

命题 5 可展曲面可以与平面成等距对应(简称展为平面)．

证明 在直角坐标系(x,y)里，平面的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=dx^2+dy^2$$

而在极坐标系(ρ,θ)里，由上式通过变换

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$$

可得第一基本形式是

$$\mathrm{I}=d\rho^2+\rho^2d\theta^2$$

我们首先考虑柱面．柱面方程可表示为

$$r=a(s)+vb$$

其中 b 为沿柱面母线的单位常向量，$a=a(s)$ 是与柱面母线正交的一条曲线，s 是它的弧长．

于是

$$r_s=\dot{a}=\alpha,\ r_v=b$$

$$E=r_s\cdot r_s=\alpha^2=1,\ F=r_s\cdot r_v=0,\ G=r_v\cdot r_v=b^2=1$$

而第一基本形式为

$$\mathrm{I}=ds^2+dv^2$$

这与上述平面的第一基本形式有相同的形式，因此柱面可以展为平面．

其次考虑锥面．锥面方程可表示为

$$r=a_0+vb(s)$$

其中 a_0 为常向量，$b(s)$为锥面母线上单位向量，而 s 是单位球面

曲线 $b=b(s)$的弧长，则有

$$b^2=1,\ b\cdot\dot{b}=0,\ \dot{b}^2=1$$

于是

$$r_s=v\dot{b},\quad r_v=b$$

$$E=r_s\cdot r_s=v^2,\ F=r_s\cdot r_v=0,\ G=r_v\cdot r_v=1$$

而第一基本形式为

$$\mathrm{I}=v^2ds^2+dv^2$$

这与上述平面的第一基本形式有相同的形式，因此锥面可以展为平面.

最后考虑切线曲面

$$r=a(s)+v\alpha(s)$$

其中 $\alpha(s)$为曲线 $a=a(s)$的切向量 $\alpha=\dot{a}(s)$，s 为曲线 $a(s)$的弧长

于是

$$r_s=\alpha+vk\beta,\quad r_v=\alpha(s)$$

$$E=r_s\cdot r_s=1+v^2k^2,\ F=r_s\cdot r_v=1,\ G=r_v\cdot r_v=1$$

而第一基本形式为

$$\mathrm{I}=(1+v^2k^2)ds^2+2dsdv+dv^2$$

从这里可以看到第一基本形式的表达式中只出现了曲线的曲率k，而没有出现挠率 τ. 因此如果两条曲线具有同一曲率

$$k=k(s)$$

那么即使挠率 τ 不同，它们的切线所构成的切线曲面具有相同的第一基本形式，因而是等距的. 但是对于给定的曲率与挠率为

$$k=k(s),\ \tau=\lambda\tau(s)\qquad(0\leqslant\lambda\leqslant1)$$

则由曲线论的基本定理，除了空间的位置外，完全确定一条曲线 (C). 当 λ 从 1 连续变动到 0 时，即得一个连续族的曲线 $\{C_\lambda\}$. 这些曲线的切线曲面也变动，但是第一基本形式保持不变，所有这些

切线曲面是等距的．当 $\lambda=0$ 时挠率 $\tau=0$，此时曲线变为平面曲线，由于平面曲线的切线仍然在此平面上，因此这时的切线曲面就是平面曲线所在的平面，而第一基本形式保持不变，因此切线曲面也可展为平面．

以上证明了可展曲面的三种类型都可以展为平面，即命题得证．

这里须要指出的是上述命题中都是指曲面和平面的一部分而言的。

习　题

1　证明曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{u^2+\frac{1}{3}v, 2u^3+uv, u^4+\frac{2}{3}u^2v\right\}$ 是可展曲面。

2　证明曲面

$$\boldsymbol{r}=\{\cos v-(u+v)\sin v, \sin v+(u+v)\cos v, u+2v\}$$

是可展曲面．

3　求平面族 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha=1$ 的包络．

4　求平面族 $a^2x+2ay+2z=2a$ 的包络．

5　证明柱面、锥面、任意空间曲线的切线面是可展曲面。

§5　曲面论的基本定理

根据以上几节的讨论，我们知道曲面

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$$

的许多性质由它的第一和第二基本形式所确定．在这一节里，我们要讨论一个反问题：给出变量 u、v 的两个二次微分形式

$$E(u, v)du^2+2F(u, v)dudv+G(u, v)dv^2$$

$$L(u, v)du^2+2M(u, v)dudv+N(u, v)dv^2$$

我们能不能确定一个曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$，它的第一和第二基本形式正好就是上面所给出的两个二次微分形式。

一般来说，这个反问题不可能有解，因为确定一个曲面只须三个函数 $x(u,v)$，$y(u,v)$ 和 $z(u,v)$，但是给出两个二次微分形式等于给出六个函数 $E(u,v)$，$F(u,v)$，$G(u,v)$ 和 $L(u,v)$，$M(u,v)$，$N(u,v)$，条件太多了．除非这六个系数函数之间只有三个是独立的，也就是说，这六个函数间有三个关系式．这一节的目的就是要寻找这三个关系式，称为**高斯-科达齐-迈因纳尔迪(Gauss-Codazzi-Mainardi)公式**．并且将证明这样一个定理：给出两个二次微分形式，如果它们满足高斯-科达齐-迈因纳尔迪条件时，则存在一个曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，它的第一和第二基本形式正好就是给定的两个二次微分形式．

为了把一些式子表达得更有规律性些，在这一节里我们将采用以下新的符号．以后我们将同时采用这一套符号和以前采用的符号．记

$$u=u^1,\ v=u^2$$

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{r}_2$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{r}_{11},\ \boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{r}_{12},\ \boldsymbol{r}_{vu}=\boldsymbol{r}_{21},\ \boldsymbol{r}_{vv}=\boldsymbol{r}_{22}$$

$$E=g_{11}=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1,\ F=g_{12}=g_{21}=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2,\ G=g_{22}=\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2$$

$$EG-F^2=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=g$$

$$L=L_{11}=\boldsymbol{r}_{11}\cdot\boldsymbol{n},\ M=L_{12}=L_{21}=\boldsymbol{r}_{12}\cdot\boldsymbol{n},\ N=L_{22}=\boldsymbol{r}_{22}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$\sum_{i=1}^{2}=\sum_{i},\quad \sum_{i,j}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}$$

等等．此外注意：

$$\sum_{\alpha}a^{\alpha}b_{\alpha}=\sum_{\beta}a^{\beta}b_{\beta},\quad \sum_{\alpha,\beta}a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma,\delta}a^{\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\text{等}$$

5.1 曲面的基本方程和克里斯托斐耳(Christoffel)符号

给出一个 C^3 类曲面 S：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$$

它确定了向量

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1},\quad \boldsymbol{r}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2},\quad \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{g}}$$

对这三个向量再求导数，我们得到一个类似于曲线论中的伏雷内公式的公式．命

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_{ij}=\sum_k \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{r}_k+\lambda_{ij}\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}_i=\sum_j \mu^j_i\boldsymbol{r}_j\end{cases}\quad (i, j=1, 2) \tag{2.68}$$

我们希望确定这些式子的系数$\Gamma^k_{ij}, \lambda_{ij}$和$\mu^j_i(i, j, k=1, 2)$．

把(2.68)的第一式点乘$\boldsymbol{n}$，注意$\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}=L_{ij}$，因此有

$$\lambda_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}=L_{ij}$$

因为$g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j$，对此式求导数得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}=\boldsymbol{r}_{il}\cdot\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_{jl}$$

同理

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_l+\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_{lj}$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}=\boldsymbol{r}_{ji}\cdot\boldsymbol{r}_l+\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_{li}$$

由于$\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ji}$，所以

$$[ij, l]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_l=\sum_k \Gamma^k_{ij}g_{kl} \tag{2.69}$$

命(g^{ij})是(g_{ij})的逆矩阵，即

$$\sum_k g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j=\begin{cases}1 & 当\ i=j \\ 0 & 当\ i\neq j\end{cases}\quad (i, j=1, 2)$$

从(2.69)可以解出系数 Γ^k_{ij} 如下:

$$\Gamma^k_{ij}=\sum_l g^{kl}[ij,\ l]=\sum_l \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$$

$$(i,\ j,\ l=1,\ 2)$$

如果采用过去的符号,则

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g}=\frac{G}{EG-F^2},\quad g^{22}=\frac{g_{11}}{g}=\frac{E}{EG-F^2}$$

$$g^{12}=g^{21}=\frac{-g_{12}}{g}=\frac{-F}{EG-F^2}$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}=\frac{\partial E}{\partial u}=E_u,\quad \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}=\frac{\partial E}{\partial v}=E_v$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}=\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1}=\frac{\partial F}{\partial u}=F_u,\quad \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}=\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2}=\frac{\partial F}{\partial v}=F_v$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}=\frac{\partial G}{\partial u}=G_u,\quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}=\frac{\partial G}{\partial v}=G_v$$

于是得到六个系数 Γ^k_{ij} 如下:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{GE_u-F(2F_u-E_v)}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma^2_{11}=\frac{E(2F_u-E_v)-FE_u}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^1_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma^2_{12}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{G(2F_v-G_u)-FG_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma^2_{22}=\frac{EG_v-F(2F_v-G_u)}{2(EG-F^2)}$$

Γ^k_{ij} 称为**第二类克里斯托斐耳符号**,也可以写成$\left\{{}_i{}^k{}_j\right\}$,此外还有**第一类克里斯托斐耳符号**,即$[ij,l]$.

注意,克里斯托斐耳符号仅依赖于曲面的第一基本形式,因此克里斯托斐耳符号是曲面的内蕴量.

实例:对于曲面上的正交坐标网来说,$F=0$,这时

$$\Gamma^1_{11}=\frac{E_u}{2E},\quad \Gamma^2_{11}=-\frac{E_v}{2G},\quad \Gamma^1_{12}=\frac{E_v}{2E}$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{G_u}{2G},\quad \Gamma_{22}^{1}=-\frac{G_u}{2E},\quad \Gamma_{22}^{2}=\frac{G_v}{2G}$$

我们再来确定(2.68)的第二式中的系数 μ_i^j. 用 $\boldsymbol{r}_k$ 去点乘这式子得到

$$-L_{ik}=\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{r}_k=\sum_j \mu_i^j g_{jk}\qquad (i,k=1,2)$$

因此

$$\mu_i^j=-\sum_k g^{jk}L_{ik}$$

用过去的符号表示得

$$\mu_1^1=\frac{-LG+MF}{EG-F^2},\quad \mu_1^2=\frac{LF-ME}{EG-F^2}$$

$$\mu_2^1=\frac{NF-MG}{EG-F^2},\quad \mu_2^2=\frac{-NE+MF}{EG-F^2}$$

对于曲面上的正交坐标网有

$$\mu_1^1=-\frac{L}{E},\quad \mu_1^2=-\frac{M}{G}$$

$$\mu_2^1=-\frac{M}{E},\quad \mu_2^2=-\frac{N}{G}$$

于是我们得到 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的导向量公式如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_{ij}=\sum\limits_k \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k+L_{ij}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{n}_i=-\sum\limits_{j,k}L_{ik}g^{kj}\boldsymbol{r}_j\end{cases}\quad (i,j=1,2)\qquad (2.68)'$$

这式称为曲面的基本方程, 其中第一式称为高斯方程, 第二式称为魏因加尔吞(Weingarten)方程.

5.2 曲面的黎曼(Riemann)曲率张量和高斯-科达齐-迈因纳尔迪(Gauss-Codazzi-Mainardi)公式

设 Γ^l_{ij} 是曲面的克里斯托斐耳符号，我们定义曲面的黎曼曲率张量如下：

$$R^l_{ijk}=\frac{\partial\Gamma^l_{ij}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^j}+\sum_p(\Gamma^p_{ij}\Gamma^l_{pk}-\Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{pj})$$

$$(i,j,k,l,p=1,2)$$

容易证明黎曼曲率张量满足下列恒等式

$$R^l_{ijk}=-R^l_{ikj}$$

因此

$$R^l_{ijj}=0$$

$$R^l_{ijk}+R^l_{jki}+R^l_{kij}=0$$

如果再定义另一种黎曼曲率张量如下：

$$R_{mijk}=\sum_l g_{ml}R^l_{ijk}\qquad(m,i,j,k=1,2)$$

则有恒等式

$$R_{mijk}=-R_{imjk},\quad R_{mmjk}=0$$

$$R_{mijk}=-R_{mikj},\quad R_{mijj}=0$$

$$R_{mijk}=R_{jkmi}$$

$$R_{mijk}+R_{mjki}+R_{mkij}=0$$

根据以上恒等式，黎曼曲率张量 R_{mijk} 的 16 个分量中，只有一个是独立的，即 R_{1212}. 下面我们要指出：它就是曲面的高斯曲率 K. 这就是为什么把 R^l_{ijk} 和 R_{mijk} 叫做曲率张量的原因. 应该特别指出的是黎曼曲率张量只与曲面的第一基本形式有关，因此是曲面的内蕴量. 它经过等距变换后保持不变.

现在我们再对 §5.1 中推出的曲面的基本方程求微商，于是得到：

命题 (1°)高斯公式

$$R_{mijk}=L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj}$$

(2°)科达齐-迈因纳尔迪公式

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}-\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}=\sum_l(\Gamma_{ik}^l L_{lj}-\Gamma_{ij}^l L_{lk})$$

证明 对(2.68)′式的高斯方程求导数，得

$$(r_{ij})_k=\sum_l\left(\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}r_l+\Gamma_{ij}^l r_{lk}\right)+\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}n+L_{ij}n_k$$

再把(2.68)′式代入上式，得

$$r_{ijk}=\sum_l\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}r_l+\sum_{l,m}\Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^m r_m+\sum_l\Gamma_{ij}^l L_{lk}n$$

$$+\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}n-\sum_{m,l}L_{ij}g^{lm}L_{mk}r_l$$

类似地

$$r_{ikj}=\sum_l\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial u^j}r_l+\sum_{l,m}\Gamma_{ik}^l\Gamma_{lj}^m r_m+\sum_l\Gamma_{ik}^l L_{lj}n$$

$$+\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}n-\sum_{m,l}L_{ik}g^{lm}L_{mj}r_l$$

因为曲面是C^3类的，所以

$$r_{ijk}=\frac{\partial^3 r}{\partial u^i\partial u^j\partial u^k}=\frac{\partial^3 r}{\partial u^i\partial u^k\partial u^j}=r_{ikj}$$

把r_{ijk}和r_{ikj}的式子分别代入上式两边，由于r_1、r_2和n是线性无关的向量，所以比较等式两边r_1、r_2和n的系数，我们得到

$$R_{ijk}^l=\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial u^j}+\sum_p(\Gamma_{ij}^p\Gamma_{pk}^l-\Gamma_{ik}^p\Gamma_{pj}^l)$$

$$=\sum_m g^{lm}(L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj})$$

即

$$R_{mijk}=L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj}\qquad(m,i,j,k,p=1,2)$$

和

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}-\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}=\sum_l(\Gamma^l_{ik}L_{lj}-\Gamma^l_{ij}L_{lk})$$

$$(i,j,k=1,2)$$

命题证毕.

注意，高斯公式中只有一个是独立的，即

$$R_{1212}=L_{12}L_{12}-L_{11}L_{22}=-(LN-M^2)=-K(EG-F^2)$$

所以有

$$K=\frac{-R_{1212}}{g}$$

于是我们得到了高斯的著名的定理：

定理 1 曲面的高斯曲率是内蕴量.

这定理说明了当一个曲面经过等距变换变成另外一个曲面的时候，它的高斯曲率也不改变. 特别地，高斯曲率不恒等于零的曲面一定不能够经过等距变换变到平面或平面的一部分.

下面给出高斯曲率的具体表达式. 我们还是根据它的原来的定义直接去计算它.

注意

$$L=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\qquad M=\frac{(\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

所以

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

$$=\frac{1}{(EG-F^2)^2}[(\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)-(\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)^2]$$

$$
=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{u} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{v} \\ \boldsymbol{r}_{u}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_{u}\cdot\boldsymbol{r}_{u} & \boldsymbol{r}_{u}\cdot\boldsymbol{r}_{v} \\ \boldsymbol{r}_{v}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_{v}\cdot\boldsymbol{r}_{u} & \boldsymbol{r}_{v}\cdot\boldsymbol{r}_{v} \end{vmatrix}\right.
$$

$$
\left.-\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{u} & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{v} \\ \boldsymbol{r}_{u}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_{u}\cdot\boldsymbol{r}_{u} & \boldsymbol{r}_{u}\cdot\boldsymbol{r}_{v} \\ \boldsymbol{r}_{v}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_{v}\cdot\boldsymbol{r}_{u} & \boldsymbol{r}_{v}\cdot\boldsymbol{r}_{v} \end{vmatrix}\right]
$$

$$
=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}-\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{u} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{v} \\ \boldsymbol{r}_{u}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_{v}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix}\right.
$$

$$
\left.-\begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{u} & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{v} \\ \boldsymbol{r}_{u}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_{v}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}\right]
$$

由于

$$
\begin{aligned}
(F_{uv}) &= (F_u)_v = ((\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)_u)_v = (\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vu})_v \\
&= \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}+\boldsymbol{r}_{uuv}\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uvv}+\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}E_{vv}=\left(\frac{1}{2}E_v\right)_v=(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv})_v-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uvv}+\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}
$$

$$
\frac{1}{2}G_{uu}=\left(\frac{1}{2}G_u\right)_u=(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vu})_u=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vuu}+\boldsymbol{r}_{vu}\cdot\boldsymbol{r}_{vu}
$$

所以

$$
F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}-\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}
$$

于是得到所求的公式

$$
K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}\right.
$$

$$
-\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\Bigg]
$$

实例：对于曲面上的正交坐标网来说有 $F=0$，所以

$$
K=\frac{-1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right]
$$

下面再给出在一般坐标网下科达齐-迈因纳尔迪公式的具体表达式，它们中间只有两个是独立的，把克里斯托斐耳符号代入这两个式子得到

$$
(EG-2FF+GE)(L_v-M_u)-(EN-2FM+GL)(E_v-F_u)+\begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix}=0
$$

$$
(EG-2FF+GE)(M_v-N_u)-(EN-2FM+GL)(F_v-G_u)+\begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix}=0
$$

5.3 曲面论的基本定理

基本定理 设

$$
\mathrm{I}=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}du^i du^j
$$

$$\mathrm{II}=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=\sum_{i,j=1}^{2}L_{ij}du^idu^j$$

是给定的两个二次形式，其中I是正定的. 若I和II的系数 g_{ij} 和 L_{ij} 对称且满足高斯-科达齐-迈因纳尔迪公式，则除了空间中的位置差别外，唯一地存在一个曲面，以I和II分别为此曲面的第一和第二基本形式.

证明 由给定的两个二次形式的系数 g_{ij} 和 L_{ij}，以及由 g_{ij} 决定的 g^{ij}，Γ^k_{ij} 为系数，考虑以 $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，$\boldsymbol{r}_1(u^1,u^2)$，$\boldsymbol{r}_2(u^1,u^2)$ 和 $\boldsymbol{n}(u^1,u^2)$ 为未知函数的一阶线性偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}=\boldsymbol{r}_i\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^j}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{r}_k+L_{ij}\boldsymbol{n}\qquad (i,j=1,2)\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i}=-\displaystyle\sum_{j,k=1}^{2}L_{ij}g^{jk}\boldsymbol{r}_k\end{cases}\tag{2.70}$$

根据偏微分方程论的解的存在定理可知，这个偏微分方程组的完全可积条件是

$$\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ji}\tag{2.71}$$

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_i)_{jk}=(\boldsymbol{r}_i)_{kj}\\ (\boldsymbol{n})_{ij}=(\boldsymbol{n})_{ji}\end{aligned}\right\}\tag{2.72}$$

其中 (2.71) 是由于 g_{ij} 和 L_{ij} 是对称的，所以 $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$，从而 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ji}$；而(2.72)则由上一小节的讨论可知，这些可积条件恰好就是高斯-科达齐-迈因纳尔迪公式. 因此对任意取定的(u^1_0,u^2_0)，给定一初始右手标架:

$$\{\boldsymbol{r}_0;(\boldsymbol{r}_1)_0,(\boldsymbol{r}_2)_0,\boldsymbol{n}_0\}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 是任意的，$(\boldsymbol{r}_1)_0$，$(\boldsymbol{r}_2)_0$，$\boldsymbol{n}_0$ 满足条件：

$$\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{r}_i)_0\cdot(\boldsymbol{r}_j)_0=g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\\ \boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{r}_i)_0=0\\ \boldsymbol{n}_0^2=1\end{array}\right\}\tag{2.73}$$

又因为是右手标架，所以

$$((\boldsymbol{r}_1)_0,(\boldsymbol{r}_2)_0,\boldsymbol{n}_0)>0$$

方程组(2.70)有唯一一组解：

$$\begin{array}{l}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)\\ \boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(u^1,u^2)\\ \boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u^1,u^2)\end{array}\tag{2.74}$$

它们满足初始条件：

$$\boldsymbol{r}(u_0^1,u_0^2)=\boldsymbol{r}_0$$

$$\boldsymbol{r}_i(u_0^1,u_0^2)=(\boldsymbol{r}_i)_0$$

$$\boldsymbol{n}(u_0^1,u_0^2)=\boldsymbol{n}_0$$

以下证明由此得到的曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 就是满足定理要求的曲面。

首先证明，在曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 上的任一点，$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{n}$ 构成一右手标架，且

$$\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=g_{ij}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i=0$$

$$\boldsymbol{n}^2=1$$

为此我们对任意的 u^1 和 u^2 求出 $\boldsymbol{r}_1^2$，$\boldsymbol{r}_2^2$，$\boldsymbol{n}^2$，$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1$ 的值，利用方程组(2.70)可得下列 12 个等式：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{r}_1^2)}{\partial u^1}=\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u^1}=\Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_1^2+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+L_{11}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{r}_1^2)}{\partial u^2}=\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u^2}=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_1^2+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+L_{12}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{r}_2^2)}{\partial u^1}=\boldsymbol{r}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial u^1}=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_2^2+L_{12}\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{r}_2^2)}{\partial u^2}=\boldsymbol{r}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial u^2}=\Gamma_{22}^1\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{r}_2^2+L_{22}\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{n}^2)}{\partial u^1}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^1}=-\sum_{j=1}^{2}(L_{1j}g^{j1}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}+L_{1j}g^{j2}\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n})\\ \frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{n}^2)}{\partial u^2}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^2}=-\sum_{j=1}^{2}(L_{2j}g^{j1}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}+L_{2j}g^{j2}\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1)}{\partial u^2}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u^2}+\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^2}\cdot\boldsymbol{r}_1=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}+L_{12}\boldsymbol{n}^2\\ \qquad -\sum_{j=1}^{2}(L_{2j}g^{j1}\boldsymbol{r}_1^2+L_{2j}g^{j2}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)\end{cases}\tag{2.75}$$

上述 12 个等式可以看做以 $\boldsymbol{r}_1^2,\boldsymbol{r}_2^2,\boldsymbol{n}^2,\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1$ 为未知函数的一阶线性偏微分方程组. 因为g_{ij}及 L_{ij}满足高斯-柯达齐-迈因纳尔迪公式,可以验证此方程组是完全可积的. 如果用 $g_{11},g_{22},1,g_{12},0,0$ 分别替代 $\boldsymbol{r}_1^2,\boldsymbol{r}_2^2,\boldsymbol{n}^2,\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1$,则不难验证它们满足方程组(2.75). 例如,我们检验第一个方程

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(g_{11})}{\partial u^1}=\Gamma_{11}^1 g_{11}+\Gamma_{11}^2 g_{12}+L_{11}\cdot 0=\frac{1}{2}\frac{\partial(g_{11})}{\partial u^1}$$

又如检验方程组(2.75)中最后一个方程

$$0=\Gamma_{12}^1\cdot 0+\Gamma_{12}^2\cdot 0+L_{12}\cdot 1-\sum_{j=1}^{2}(L_{2j}g^{j1}g_{11}+L_{2j}g^{j2}g_{21})$$

$$=L_{12}-\sum_{j=1}^{2}(g^{j1}g_{11}+g^{j2}g_{21})L_{2j}$$

$$=L_{12}-\sum_{j=1}^{2}L_{2j}\delta_1^j=L_{12}-L_{21}=0$$

方程组(2.75)的其他方程也可按同法检验．又因为这些解具有相同的初始值(2.73)，因此，由解的唯一性得到

$$\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=g_{ij}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i=0$$

$$\boldsymbol{n}^2=1$$

又因为

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n})^2>0$$

所以$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n})$恒正或恒负，但是在初始点

$$((\boldsymbol{r}_1)_0,(\boldsymbol{r}_2)_0,\boldsymbol{n}_0)>0$$

由解的连续性可知

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n})>0$$

再证明定理所给定的二次形式Ⅰ和Ⅱ分别为此曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$的第一和第二基本形式．

由$\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=g_{ij}$得知Ⅰ$=\sum_{i,j=1}^{2}g_{ij}du^idu^j$是曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$的第一基本形式，再由$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i=0$，$\boldsymbol{n}^2=1$得知$\boldsymbol{n}$是此曲面的单位法向量，又因为

$$\boldsymbol{r}_{ij}=\sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{r}_k+L_{ij}\boldsymbol{n}$$

所以

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{ij}=L_{ij}$$

即Ⅱ$=\sum_{i,j=1}^{2}L_{ij}du^idu^j$为曲面的第二基本形式．这样就证明了合于要求的曲面的存在性．

以下证明：除了空间中的位置差别外，唯一地存在一个曲面以 I, II为其第一,二基本形式.

假定有两个曲面 S_1 和 S_2 存在，它们有相同的第一和第二基本形式. 在 S_1 和 S_2 上对第一、第二基本形式相同的点取相同的曲纹坐标 (u^1, u^2). 在点 (u_0^1, u_0^2) 各作 S_1, S_2 的标架, 则经过适当的刚体运动，可以使曲面 S_1 在点 (u_0^1, u_0^2) 的标架跟曲面 S_2 在点 (u_0^1, u_0^2) 的标架重合. 这样的重合是可能的, 因为它们有相同的第一类基本量，于是 $(\boldsymbol{r}_1)_0$, $(\boldsymbol{r}_2)_0$ 有相同的交角 $\left(\arccos\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)_0$. 假设经过这样的重合后, 这两个曲面的方程分别是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2) \quad 和 \quad \boldsymbol{r}=\bar{\boldsymbol{r}}(u^1, u^2)$$

如果取

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(u^1, u^2), \quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2(u^1, u^2), \quad \boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u^1, u^2)$$

或

$$\boldsymbol{r}_1=\bar{\boldsymbol{r}}_1(u^1, u^2), \quad \boldsymbol{r}_2=\bar{\boldsymbol{r}}_2(u^1, u^2), \quad \boldsymbol{n}=\bar{\boldsymbol{n}}(u^1, u^2)$$

因为 S_1 和 S_2 有相同的第一、二基本形式, 因此由 g_{ij}, L_{ij} 作出的方程组(2.70)也是相同的. 因此，上述这两组函数都满足方程组(2.70). 其次, 由于这两组函数在点 (u_0^1, u_0^2) 满足同样的初始条件: $\{\boldsymbol{r}_0; (\boldsymbol{r}_1)_0, (\boldsymbol{r}_2)_0, \boldsymbol{n}_0\}$. 根据解的唯一性, 这两组函数在任意点 (u^1, u^2) 总是恒等的. 因此, 对于任意的 u^1, u^2 都有:

$$\boldsymbol{r}(u^1, u^2)=\bar{\boldsymbol{r}}(u^1, u^2), \quad \boldsymbol{r}_1(u^1, u^2)=\bar{\boldsymbol{r}}_1(u^1, u^2),$$
$$\boldsymbol{r}_2(u^1, u^2)=\bar{\boldsymbol{r}}_2(u^1, u^2)$$

所以曲面 S_1 和 S_2 除了一个刚体运动外, 是完全一致的, 即除了空间中的位置差别外，唯一地存在一个曲面以定理给定的两个二次形式为其第一、二基本形式.

习　　题

1　求证

$$R_{mijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial u^i\partial u^k}+\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^m\partial u^j}-\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial u^i\partial u^j}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^m\partial u^k}\right)$$

$$+\sum_p(\Gamma^p_{ik}\cdot[mj,p]-\Gamma^p_{ij}\cdot[mk,p])$$

2　对于 R^3 中的空间曲面来说

$$R^l_{ijk}=-K(\delta^l_j g_{ik}-\delta^l_k g_{ij})$$

其中K是曲面的高斯曲率.

3　证明以下公式:

(1) $K=\frac{1}{E}[(\Gamma^2_{11})_v-(\Gamma^2_{12})_u$

$$+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}-(\Gamma^2_{12})^2]$$

(2) $K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma^2_{11}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma^2_{12}\right)\right]$

(3) $K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\Gamma^1_{22}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\Gamma^1_{12}\right)\right]$

(4) 对于曲面上的等温坐标网有 $ds^2=\lambda^2(du^2+dv^2)$, 求证:

$$K=-\frac{1}{\lambda^2}[(\ln\lambda)_{uu}+(\ln\lambda)_{vv}]$$

(5) 对于曲面上的半测地坐标网(见 §6.3)有 $ds^2=du^2+Gdv^2$, 求证:

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

4　如果曲面的第一基本形式是 $ds^2=\frac{du^2+dv^2}{(u^2+v^2+C)^2}$, 计算第二类克里斯托斐耳符号.

5　求证第一基本形式是 $ds^2=\frac{du^2+dv^2}{(u^2+v^2+C)^2}$的曲面有常高斯曲率.

§6　曲面上的测地线

6.1　曲面上曲线的测地曲率

给出一个曲面 S

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,u^2)$$

(C)是曲面上的一条曲线:

$$u^\alpha=u^\alpha(s) \qquad (\alpha=1,2)$$

其中 s 是(C)的自然参数.

设P是(C)上一点,$\boldsymbol{\alpha}$是(C)在P点的单位切向量,$\boldsymbol{\beta}$是主法向量,$\boldsymbol{\gamma}$是副法向量. 再设$\boldsymbol{n}$是曲面S在P点的单位法向量, θ是$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{n}$的夹角(如图 2-28),则曲面S在P点的切方向$\boldsymbol{\alpha}$上的法曲率是

$$k_n=k\cos\theta=k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}=\ddot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{n}$$

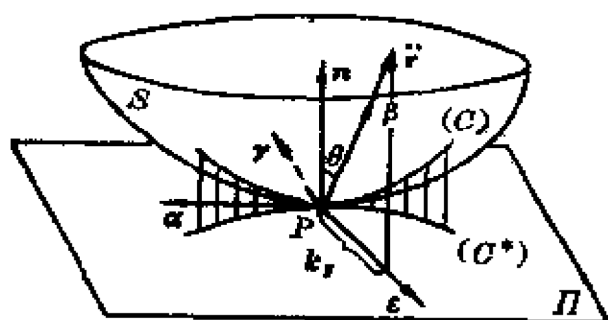


图 2-28

命$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha}$,则$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{n}$是彼此正交的单位向量, 并且构成一右手系.

定义 曲线(C)在P点的曲率向量$\ddot{\mathbf{r}}=k\boldsymbol{\beta}$在$\boldsymbol{\varepsilon}$上的投影(也就是在$S$上$P$点的切平面$\Pi$上的投影)

$$k_g=\ddot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$$

称为曲线(C)在P点的**测地曲率**.

由于

$$k_g=k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=k(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n},\boldsymbol{\alpha})=k(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{n}=k\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n}$$

所以有

$$k_g=k\cos(90^\circ\pm\theta)=\pm k\sin\theta$$

命题 1 $k^2=k_g^2+k_n^2$

证明 $k_g^2+k_n^2=k^2\sin^2\theta+k^2\cos^2\theta=k^2$

下面我们给出测地曲率的几何意义.

命题 2 曲面 S 上的曲线 (C)，它在 P 点的测地曲率的绝对值等于 (C) 在 P 点的切平面 Π 上的正投影曲线 (C^*) 的曲率.

证明 过 (C) 的每一点作曲面 S 在点 P 的切平面的垂线，于是得一柱面. 这柱面和 S 在 P 点的切平面的交线就是 (C^*). (C) 和 (C^*) 都是柱面上的曲线. 在此柱面上应用梅尼埃定理. 取 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为柱面上 P 点的法向量(见图 2-28)，柱面上过 P 点的在 (C) 的切方向上的法截线是 (C^*)，柱面在这方向上的法曲率的绝对值等于 (C^*) 在 P 点的曲率. 但是这个法曲率又等于 (C) 在 P 点的曲率 k 乘以 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 夹角的余弦，即 $k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$，这就是 (C) 在 P 点的测地曲率. 命题证毕.

由此可知曲面上的直线其测地曲率为 0.

现在我们来推导测地曲率的计算公式. 由于

$$k_g=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n})=(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{n})$$

而

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\sum_i\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{r}_i$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\sum_{i,j}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{r}_{ij}+\sum_i\frac{d^2u^i}{ds^2}\boldsymbol{r}_i$$

$$=\sum_{i,j,k}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{r}_k+\sum_{i,j}L_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{n}+\sum_k\frac{d^2u^k}{ds^2}\boldsymbol{r}_k$$

所以

$$k_g=(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{n})=\left(\sum_i\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{r}_i,\ \sum_k\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j}L_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\right)$$

$$=\left[\frac{du^1}{ds}\left(\frac{d^2u^2}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{du^2}{ds}\left(\frac{d^2u^1}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\right](\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n})$$

由此得到

$$k_g=\sqrt{g}\left[\frac{du^1}{ds}\left(\frac{d^2u^2}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{du^2}{ds}\left(\frac{d^2u^1}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\right]$$

6.2 曲面上的测地线

定义 曲面上的一条曲线，如果它的每一点处的测地曲率为零，则称为测地线.

从此定义直接推出：曲面上如果存在直线(如直纹面)，则此直线一定是测地线.

命题 3 曲面上非直线的曲线是测地线的充分必要条件是除了曲率为零的点以外，曲线的主法线重合于曲面的法线.

证明 因为 $k_g=\pm k\sin\theta$，如果 $k\neq 0$，则 $k_g=0$ 可以推出 $\theta=0$ 或 π，

所以

$$\boldsymbol{\beta}=\pm\boldsymbol{n}$$

反之，$\theta=0$ 或 π，可以得到 $k_g=0(k\neq 0)$.

推论 如果两曲面沿一曲线相切，并且此曲线是其中一个曲面的测地线，那么它也是另一个曲面的测地线.

证明 因为这两个曲面沿这曲线的法线重合，而此曲线的主法线只有一条．所以此曲线的主法线同时与两个曲面沿此曲线的法线重合.

实例：球面上的大圆一定是测地线．这是因为大圆的主法线

重合于球面的法线.

下面我们给出曲面上测地线的方程. 由于

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_l=0 \qquad (l=1,2)$$

所以有

$$\beta\cdot\boldsymbol{r}_l=0$$

或

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}_l=0$$

再由

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\sum_k\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k+\sum_{i,j}L_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{n}$$

因此

$$\sum_k g_{kl}\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)=0$$

但是 $g=\det(g_{kl})\neq 0$, 于是得到测地线的方程

$$\frac{d^2u^k}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=0 \quad (k=1,2)$$

由上一小节中测地曲率的公式可以推出: 满足此方程的曲线都是测地线. 给出初始条件:

$$s=s_0\text{时}\quad u^k=u^k_0,\quad \frac{du^k}{ds}=\left(\frac{du^k}{ds}\right)_0$$

也就是给出曲面上一点和一个切方向, 根据常微分方程理论, 存在唯一条曲线(C):

$$u^k=u^k(s)$$

过已知点 $\boldsymbol{r}(u^1(s_0),\ u^2(s_0))$, 并且切于给定的方向$\left(\frac{du^1}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{du^2}{ds}\right)_0$. 于是得到:

定理 1 过曲面上任一点, 给定一个曲面的切方向, 则存在唯

一一条测地线切于此方向.

在§6.4中我们将要证明，曲面上的测地线也就是曲面上的短程线.

6.3 曲面上的半测地坐标网

定义 曲面上的一个坐标网，其中一族是测地线，另一族是这族测地线的正交轨线，则这个坐标网称为**半测地坐标网**.

实例：平面上的极坐标系，一族坐标曲线是从原点出发的射线，这是平面上的测地线；另一族坐标曲线是以原点为心的同心圆，它们是上述测地线的正交轨线. 因此半测地坐标网是平面上极坐标网在曲面上的推广.

命题4 给出曲面上一条曲线，则总存在一个半测地坐标网，它的非测地坐标曲线族中包含给定的一条曲线.

证明 根据定理1，过曲面上给定的曲线(C)的每一点，沿着(C)，在切平面上对于垂直于(C)的切线的方向，存在曲面的唯一一条测地线，于是得到与(C)正交的测地曲线族. 然后，再作这一族测地线的正交轨线，它必定包含了给定的曲线.

现在我们讨论，当在曲面上取半测地坐标网时，曲面的第一基本形式将是怎样的.

首先，由于坐标网是正交的，因而$F=0$，则

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2$$

这时

$$\Gamma^1_{11}=\frac{E_u}{2E},\quad \Gamma^2_{11}=-\frac{E_v}{2G},\quad \Gamma^1_{12}=\frac{E_v}{2E}$$

$$\Gamma^2_{12}=\frac{G_u}{2G},\quad \Gamma^1_{22}=-\frac{G_u}{2E},\quad \Gamma^2_{22}=\frac{G_v}{2G}$$

设u-曲线是测地线，则$v=$常数（即$u^2=$常数）应满足测地线方程

$$\ddot{u}^2+\sum_{j,k}\Gamma^2_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k=0$$

所以

$$\Gamma_{11}^{2}=-\frac{1}{2}\frac{E_v}{G}=0$$

因而

$$E_v=0$$

则

$$E=\varphi(u)>0 \qquad (E>0\text{, 因为第一基本形式是正定的})$$

在曲面上引进新的参数 $\bar{u}$, 使得

$$d\bar{u}=\sqrt{\varphi(u)}\,du$$

则

$$ds^2=d\bar{u}^2+\bar{G}(\bar{u},v)\,dv^2$$

参数 $\bar{u}$ 的几何意义如下：在测地线 $v=$常数上，两条正交轨线 $\bar{u}=c_1$ 和 $\bar{u}=c_2$ 之间测地线的长度 $=|c_1-c_2|$，因为在此曲线上有 $ds^2=d\bar{u}^2$，所以 $s=\left|\int_{c_1}^{c_2}d\bar{u}\right|=|c_1-c_2|$。

设确定半测地坐标网的曲线(C)的参数表示式是 $\bar{u}=u_0$，在曲面上引进新的参数 $\bar{v}$, 使得

$$d\bar{v}=\sqrt{\bar{G}(u_0,v)}\,dv \qquad (EG>0\text{, 因为 }E>0\text{, 所以 }G>0)$$

则曲面的第一基本形式可以改写成

$$ds^2=d\bar{u}^2+\bar{\bar{G}}(\bar{u},\bar{v})\,d\bar{v}^2$$

其中 $\bar{\bar{G}}(\bar{u},\bar{v})=\bar{G}(\bar{u},v(\bar{v}))$。

参数 $\bar{v}$ 的几何意义如下：在曲线 (C) $(\bar{u}=u_0)$上, $ds^2=\bar{G}(u_0,v)dv^2=d\bar{v}^2$, 所以 $\bar{\bar{G}}(u_0,\bar{v})=1$，并且$(C)$上界于两测地线 $\bar{v}=d_1$ 和 $\bar{v}=d_2$ 之间的弧长 $=|d_2-d_1|$。

如果我们进一步选(C)是一条测地线 $\bar{u}=u_0$，由测地线的方程

$$\ddot{u}^1+\sum_{j,k}\Gamma_{jk}^{1}\dot{u}^j\dot{u}^k=0$$

知

$$\Gamma_{22}^{1}|_{u=u_0}=0$$

则

$$\bar{G}_u(u_0,\bar{v})=0$$

小结：取曲面上一条测地线 (C) 为 v-曲线：$u=u_0$，再取与 (C) 正交的测地线族为 u-曲线，另取这测地线族的正交轨线为 v-曲线，则得一半测地坐标网．对于这个坐标网而言，曲面的第一基本形式可以简化为

$$ds^2=du^2+Gdv^2$$

其中 $G(u,v)$ 满足条件

$$G(u_0,v)=1,\qquad G_u(u_0,v)=0$$

参数 u 和 v 的几何意义是：在测地线族（即 u-曲线或 $v=$常数）上，介于 v-曲线 $u=c_1$ 和 $u=c_2$ 之间的弧长为 $|c_2-c_1|$；在测地线 (C) $(u=u_0)$ 上介于 u-曲线 $v=d_1$ 和 $v=d_2$ 之间的弧长为 $|d_2-d_1|$．

6.4 曲面上测地线的短程性

利用曲面上的半测地坐标网容易证明测地线的短程性，即在适当的小范围内连结任意两点的测地线是最短线，所以测地线又称为短程线．

定理 2 给出曲面上充分小邻域内的两点 P 和 Q，则过 P,Q 两点在小邻域内的测地线段是连结 P，Q 两点的曲面上的曲线中弧长最短的曲线．

证明 设 (C) 是曲面上连结 P,Q 两点的一条测地线．在曲面上选取半测地坐标网，使曲面上包含 (C) 在内的一测地线族为 u-曲线，它们的正交轨线为 v-曲线，则根据上述结果，曲面的第一基

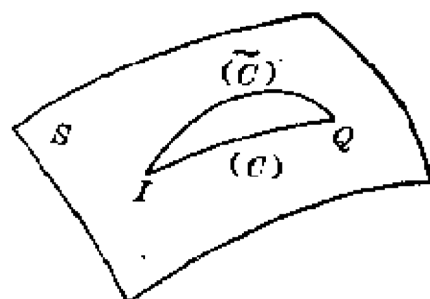


图 2-29

本形式为

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

不妨设曲线(C)的方程为 $v=0$, P 和 Q 的坐标分别为 $(u_1,\ 0)$ 和 $(u_2, 0)$ $(u_1<u_2)$，于是，沿测地线(C)由 P 到 Q 的弧长为

$$s(\widehat{PQ})\Big|_{(C)} = u_2 - u_1$$

又在这个小邻域内连结 P 和 Q 的任意曲线$(\widetilde{C})$的方程设为

$$v = v(u)$$

则沿曲线$(\widetilde{C})$，由 P 到 Q 的弧长为

$$s(\widehat{PQ})\Big|_{(\widetilde{C})} = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1+Gv'^2}\,du$$

而

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1+Gv'^2}\,du \geqslant \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$$

而且只有当 $v'=0$ 时，上式中的等号成立，但 $v'=0$ 即 $v=$常数(u-曲线)，这表示$(\widetilde{C})$与(C)重合．这就证明了(C)是连结 P，Q 的最短线．

需要说明的是如果不限制在一充分小的曲面片上，这个定理的结论不一定正确．例如在球面上，如果两点不是一条直径的两端，连结它们的大圆弧(测地线)有两条，这两条大圆弧一长一短，短的是最短线，长的不是．但是如果只取球面上不含有任何同一条直径的两个端点的一部分，则上述定理的结论是正确的．

关于定理 2，我们也可以利用变分法的理论来证明．

设曲面上的曲线(C)：

$$u^i = u^i(s)$$

通过P和Q两点．P和Q对应的参数值是 s_1 和 s_2．过这两点邻近(C)的曲线是$(\widetilde{C})$：

$$\tilde{u}^i = u^i(s) + \varepsilon w^i(s)$$

其中 ε 是充分小量，并且 $w^i(s_1) = w^i(s_2) = 0$．

沿曲线(C)在PQ间的弧长为

$$s=\int_{s_1}^{s_2} ds=\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}}ds$$

$$=\int_{s_1}^{s_2}\varphi(u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2)\,ds$$

沿曲线$(\widetilde{C})$的PQ间的弧长为

$$\bar{s}(\varepsilon)=\int_{s_1}^{s_2}\varphi(u^1+\varepsilon w^1, u^2+\varepsilon w^2, \dot{u}^1+\varepsilon\dot{w}^1, \dot{u}^2+\varepsilon\dot{w}^2)\,ds$$

当$\varepsilon=0$时，$\bar{s}(0)=s$，要使(C)是曲线族$(\widetilde{C})$中弧长最短的曲线，必须有

$$\left.\frac{d\bar{s}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

即

$$\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}w^1+\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}w^2+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^1}\dot{w}^1+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^2}\dot{w}^2\right)ds=0$$

或

$$\sum_i\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}w^i+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}\dot{w}^i\right)ds=0$$

根据分部积分

$$\sum_i\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}\dot{w}^i ds=\sum_i\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}d(w^i)=\sum_i\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}w^i\Big|_{s_1}^{s_2}-\sum_i\int_{s_1}^{s_2}w^i d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}\right)$$

但是$w^i(s_1)=w^i(s_2)=0$，因此有

$$\sum_i\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}\dot{w}^i ds=-\int_{s_1}^{s_2}\sum_i w^i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}\right)ds$$

于是得

$$\int_{s_1}^{s_2}\sum_i w^i\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}\right)\right]ds=0$$

因为函数w^i是任意的，于是得到欧拉(Euler)方程

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}=0\qquad(i=1, 2)$$

由于

$$\varphi=\sqrt{\sum_{i,j}g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}=\frac{\sum_j g_{ij}\dot{u}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}}=\sum_j g_{ij}\dot{u}^j \qquad \left(\sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j=\frac{\Sigma g_{ij}du^idu^j}{ds^2}=1\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}=\frac{\sum_{j,k}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot{u}^j\dot{u}^k}{2\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}}=\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot{u}^j\dot{u}^k$$

于是欧拉方程简化成

$$\sum_j g_{ij}\ddot{u}^j+\sum_{j,k}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\dot{u}^k\dot{u}^j-\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot{u}^j\dot{u}^k=0$$

由于

$$\sum_l g_{il}\Gamma^l_{jk}=[jk,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)$$

所以

$$\sum_{l,j,k} g_{il}\Gamma^l_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k=\sum_{j,k}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\dot{u}^j\dot{u}^k+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\dot{u}^j\dot{u}^k-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot{u}^j\dot{u}^k\right)$$

$$=\sum_{j,k}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\dot{u}^j\dot{u}^k-\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot{u}^j\dot{u}^k$$

因此欧拉方程又可以写成

$$\sum_l g_{il}\left(\ddot{u}^l+\sum_{j,k}\Gamma^l_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k\right)=0$$

因为 $g=\det(g_{il})\neq 0$，上式等价于

$$\ddot{u}^l+\sum_{j,k}\Gamma^l_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k=0 \qquad (l=1,2)$$

这就是测地线方程．所以短程线(C)就是测地线．

6.5 高斯-波涅(Gauss-Bonnet)公式

在平面几何中我们知道三角形的三内角之和为 180°，如何把这个结论推广到曲面上，这是我们在这里所要解决的问题．

在曲面 S 上给出一个由 k 条光滑曲线段所围成的曲线多边形

(如图 2-30)，它围成了一个单连通曲面域 G. 多边形是 G 的边缘，记为 ∂G. 设曲面 S 的高斯曲率和测地曲率分别为 K 和 k_g，曲面的面积元素和弧长元素分别为 $d\sigma$ 和 ds，则有以下公式成立.

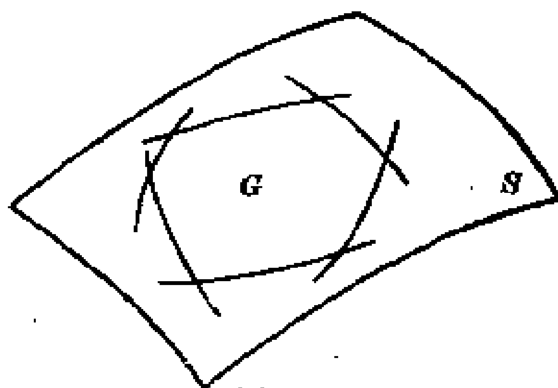


图 2-30

高斯-波涅公式

$$\iint_G K d\sigma + \oint_{\partial G} k_g ds + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) = 2\pi$$

其中 α_i 是 ∂G 的第 i 个内角的角度，$\pi - \alpha_i$ 是外角的角度。

以下证明此公式成立。

在曲面 S 上引进半测地坐标网，则有

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

且

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \qquad \Gamma_{11}^2 = 0, \qquad \Gamma_{12}^1 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \qquad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} G_u, \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}$$

又由本节末的习题第 4 题知

$$k_g ds = d\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)\right] + (\sqrt{G})_u dv$$

于是得

$$\oint_{\partial G} k_g ds + \oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u dv = \oint_{\partial G} d\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)\right] \tag{2.76}$$

根据 Green 公式

$$\oint_{\partial G} P(u, v) du + Q(u, v) dv = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du dv$$

命 $P = 0$, $Q = -(\sqrt{G})_u$，则有

$$\oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u dv = \iint_G -(\sqrt{G})_{uu} du dv$$

但是

$$d\sigma = \sqrt{G} du dv$$

并且由 §5 的习题知，在半测地坐标网中 Gauss 曲率 K 的公式是

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

所以(2.76)式的第二个积分是

$$\oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u dv = \iint_G K d\sigma$$

现在我们讨论(2.76)中的第三个积分．设 ∂G 的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 u-曲线的切向量 $\boldsymbol{r}_u$ 的夹角为 θ．由于在半测地坐标网中 $\boldsymbol{r}_u$ 是单位向量，所以有

$$\cos\theta = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}_u = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\boldsymbol{r}_u = \frac{\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv}{ds}\cdot\boldsymbol{r}_u = \frac{du}{ds}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{du}{ds}\right)^2} = \pm\sqrt{G}\frac{dv}{ds}$$

那么

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\pm\sqrt{G}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{du}{ds}} = \pm\sqrt{G}\frac{dv}{du}$$

其中所以产生正负号的原因是由于沿 ∂G 积分时有两种不同的方向，不过如果我们采取逆时针方向时，可只取正号，即

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right) \quad 或 \quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{G}\frac{dv}{du}$$

这样(2.76)可简化为

$$\oint_{\partial G} k_g ds + \iint_G K d\sigma = \oint_{\partial G} d\theta$$

易知绕∂G一周后,θ的增量是2π,但这个增量并不完全由上式中的第三个积分产生的,其中每一个外角$\pi-\alpha_i$是自然存在的增量,所以

$$\oint_{\partial G} d\theta = 2\pi - (\pi-\alpha_1) - (\pi-\alpha_2) - \cdots - (\pi-\alpha_k)$$

于是(2.76)就变成所求的公式

$$\iint_G K d\sigma + \oint_{\partial G} k_g ds + \sum_{i=1}^{k}(\pi-\alpha_i) = 2\pi$$

推论

1 如果∂G是一条光滑曲线,则有

$$\iint_G K d\sigma + \oint_{\partial G} k_g ds = 2\pi$$

2 如果∂G是由测地线组成,则有

$$\iint_G K d\sigma + \sum_{i=1}^{k}(\pi-\alpha_k) = 2\pi$$

3 如果∂G是一个测地三角形,即三条测地线所围成的三角形,则有

$$\iint_G K d\sigma = 2\pi - (\pi-\alpha_1) - (\pi-\alpha_2) - (\pi-\alpha_3) = S(\Delta) - \pi$$

其中$S(\Delta)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$表示三内角之和。

6.6 曲面上向量的平行移动

一 曲面上的向量及其平行移动

曲面上的向量,指的是曲面上给定点处切于此曲面的向量.如果从曲面的一点到另外一点平行移动一向量,那么,一般来说平行移动后的向量的方向与切平面成一角度,因而不能认为是曲面上的向量.我们在这里建立曲面上向量的平行移动的概念.

设沿曲面S上一曲线(C)

$$u^i = u^i(t) \qquad (i=1,2)$$

的点$M(t)$，给出一向量 $\boldsymbol{a}(t)$，它在点$M(t)$处切于曲面，且沿此曲线给出一向量场．当向量 $\boldsymbol{a}$ 从点M移动(按通常意义的移动)到邻近点 M' 时得到增量，其主要部分等于微分 $d\boldsymbol{a}$．从点M引 $\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a}$，那么一般来说，这个向量不在点$M$的切平面上．因此它不再是曲面在$M$的切向量，我们把它分解为在切平面上的和沿曲面法线 $\boldsymbol{n}$ 方向的两个支量(图 2-31)．

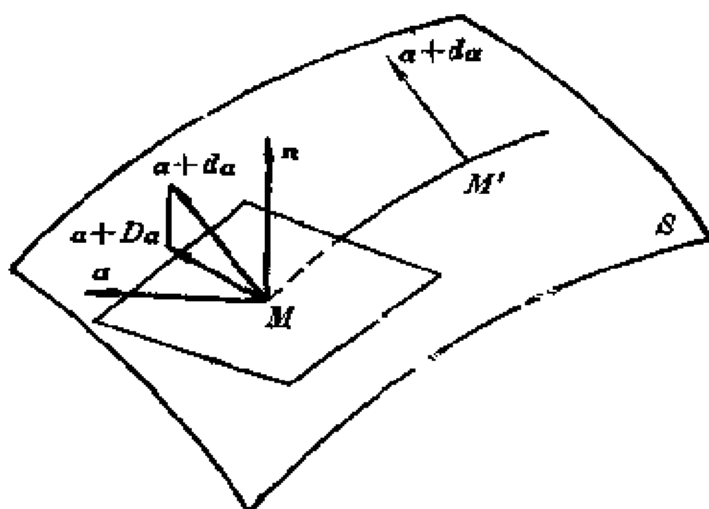


图 2-31

沿法线方向的支量为

$$[\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a})]\boldsymbol{n}$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 在点M处切于曲面，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0$，因而向量 $\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a}$ 沿法线方向的支量可由下式表示：

$$(\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{a})\boldsymbol{n}$$

从 $\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a}$ 减去它在法线方向的支量，我们得到切线支量，记为$(\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a})_t$，则有

$$(\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a})_t = \boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{a})\boldsymbol{n}$$

这是从 $\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a}$ 到点M处的切平面上的投影向量．

我们把点M处的向量 $(\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a})_t$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的差称为向量 $\boldsymbol{a}$ 从点M沿曲线(C)移动到点M' 的绝对微分，用 $D\boldsymbol{a}$ 来表示：

$$Da = da - (n \cdot da)n \tag{2.77}$$

由以上看出，当向量从点M沿曲线(C)移动到点M'时，向量a的绝对微分Da等于把它的通常微分da投影到点M处的切平面上的部分，因此在点M处向量a的绝对微分Da仍然是一个在点M处切于曲面的向量.

当$Da=0$时，表示向量a从点M沿(C)的方向移动到点M'时，微分da沿法线n的方向，换句话说，把向量$a+da$投影到点M的切平面上时，我们得到向量a. 这时，我们称向量$a+da$是向量a从点M沿(C)的方向到邻近点M'经过**平行移动**而得到的向量.

因为这样所定义的平行移动概念与所选取的曲线$u^i=u^i(t)$有关，因此a与$a+da$称为沿曲线$u^i=u^i(t)$在勒维-其维塔(Levi-Civita)意义下的平行向量，即称向量$a+da$与a沿曲线$u^i=u^i(t)$是勒维-其维塔平行移动.

特别地，在平面上向量的勒维-其维塔平行移动和通常意义下的平行移动一致，这是由于在平面上$da=Da$.

现在我们导出绝对微分的分析表达式，从而可以得到平行移动的分析条件. 设沿所考虑的曲线(C)，在曲线上每一个点，向量$a(t)$的坐标是$a^1(t), a^2(t)$，即

$$a = a^1 r_1 + a^2 r_2$$

其中r_1, r_2取为曲面上在同一点t的切平面上的坐标向量.

先计算da:

$$da = da^1 r_1 + da^2 r_2 + a^1(r_{11}du^1 + r_{12}du^2) + a^2(r_{12}du^1 + r_{22}du^2)$$

利用Gauss方程，则有

$$\begin{aligned} da = {} & da^1 r_1 + da^2 r_2 \\ & + a^1\{(\Gamma_{11}^1 r_1 + \Gamma_{11}^2 r_2)du^1 + (\Gamma_{12}^1 r_1 + \Gamma_{12}^2 r_2)du^2\} \\ & + a^2\{(\Gamma_{12}^1 r_1 + \Gamma_{12}^2 r_2)du^1 + (\Gamma_{22}^1 r_1 + \Gamma_{22}^2 r_2)du^2\} + (*)n \end{aligned}$$

这里没有写出的各项包含向量 $\boldsymbol{n}$ 且组成向量 $d\boldsymbol{a}$ 的法线支量. 去掉 $d\boldsymbol{a}$ 的法线支量后，所得到的就是 $D\boldsymbol{a}$，把上式中的各项加以整理，即得

$$\begin{aligned}D\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_1(da^1+\Gamma^1_{11}a^1du^1+\Gamma^1_{12}a^1du^2+\Gamma^1_{21}a^2du^1\\+\Gamma^1_{22}a^2du^2)+\boldsymbol{r}_2(da^2+\Gamma^2_{11}a^1du^1+\Gamma^2_{12}a^1du^2\\+\Gamma^2_{21}a^2du^1+\Gamma^2_{22}a^2du^2)\end{aligned}$$

若 $D\boldsymbol{a}$ 的坐标以 Da^1, Da^2 来表示，即

$$D\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_1Da^1+\boldsymbol{r}_2Da^2$$

则得

$$\begin{aligned}Da^1=da^1+\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma^1_{\alpha\beta}a^\alpha du^\beta\\Da^2=da^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma^2_{\alpha\beta}a^\alpha du^\beta\end{aligned}\qquad(2.78)$$

这就是绝对微分的表达式.

特别地，若向量 $\boldsymbol{a}$ 作平行移动，则 $D\boldsymbol{a}=0$，或即 $Da^1=Da^2=0$. 从而我们得到向量 $\boldsymbol{a}$ 由点 M 沿着方向 (du^1, du^2) 平行移动到邻近点 M' 的分析表达式:

$$\begin{aligned}da^1=-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma^1_{\alpha\beta}a^\alpha du^\beta\\da^2=-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma^2_{\alpha\beta}a^\alpha du^\beta\end{aligned}\qquad(2.79)$$

这个条件表示，在平行移动下，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标的微分可用它在点 M 处的坐标 a^1，a^2 和在点 M 的 Γ^k_{ij} 以及对应于从点 M 到点 M' 的微小位移的坐标微分 du^1, du^2 来表达.

二 平行移动的性质

以上我们只在微小范围内考虑曲面上的平行移动. 现在把这

个沿已知曲线作微小移动引用到有限部分的情形。

设在曲面上一条已知曲线(C)：

$$u^i = u^i(t)$$

它的起点 $u^1(0)$，$u^2(0)$处作出曲面上的某一个向量 a_0，如果在曲线(C)的某一点 t 处作出曲面上的向量 $a(t)$(图 2-32)，使得当由

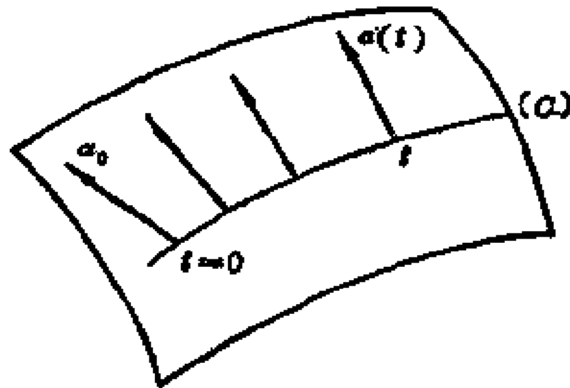


图 2-32

点 t 移动到点 $t+dt$ 时，向量 $a+da$ 是向量 a 由平行移动而得到的向量；且在起点 $t=0$ 的向量 $a(t)$合于 a_0。我们说，向量 a_0 沿曲线(C)的平行移动是实现了，换句话说，向量函数 $a(t)$的坐标 $a^1(t)$，$a^2(t)$ 在从点 t 到 $t+dt$ 的移动下，满足平行移动的条件(2.79)；以 dt 除之，则函数 $a^1(t)$, $a^2(t)$必须满足下列微分方程：

$$\begin{aligned} \frac{da^1}{dt} &= -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Gamma^1_{\alpha\beta} a^\alpha \frac{du^\beta}{dt} \\ \frac{da^2}{dt} &= -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Gamma^2_{\alpha\beta} a^\alpha \frac{du^\beta}{dt} \end{aligned} \tag{2.80}$$

由此我们可以看到，a^1, a^2 关于 t 的导数是 a^1，a^2 本身的线性函数；这时，a^1, a^2 的系数是 t 的已知函数．此外，当 $t=0$ 时，所求的函数 a^1, a^2 必取初始值 a^1_0, a^2_0，即向量 a_0 的坐标．因此微分方程组(2.80)的解 $a^1(t)$, $a^2(t)$是唯一存在的．总之，沿已知的曲面曲线(C)的平行移动总可以唯一地实现。

现在，导出在曲面上平行移动的一个很重要而且与普通意义下的平行移动相仿的性质.

若在起点$M(t=0)$给定许多个切于曲面的向量，然后使这些向量沿一条曲面曲线平行移动，则这些向量的长度及它们之间的夹角都保持不变.

为了导出这个结论，我们先求出沿曲面平行移动的向量的作图法. 为此，沿某一曲面曲线(C)作出曲面的切平面，它们的包络是一可展曲面. 若在(C)上各个点作切于曲面的诸向量 $\boldsymbol{a}(t)$，则这些向量和曲线 (C) 也在可展曲面上. 把可展曲面展为平面，令曲线(C)展为平面上的曲线(C_0)，而向量$\boldsymbol{a}$变为平面上的向量 $\boldsymbol{a}_0$. 因可展曲面的切平面也是原曲面的切平面，由平行移动的定义知，向量$\boldsymbol{a}$沿一曲线(C)的平行移动仅与沿曲线(C)的曲面的切平面的位置有关，所以当且仅当该向量为沿(C)的可展曲面上的平行移动时，向量$\boldsymbol{a}$在原曲面上为沿曲线(C)的平行移动. 另一方面，当展为平面时，平行移动的向量仍为平行移动的向量. 因此，我们得到下列结论：

向量沿一条已知曲面曲线(C)平行移动的充要条件是沿(C)所作的切平面的包络面所得可展曲面展开在平面上时，所得到的向量在平面上为平行移动.

由此，我们得出沿曲面曲线平行移动的向量的作图法：若在曲面曲线(C)上一点M给定一个向量$\boldsymbol{a}$（图 2-33），使其沿(C)平

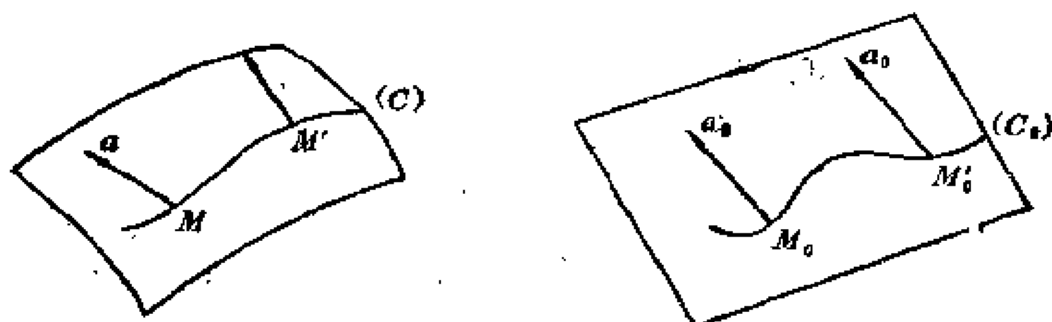


图 2-33

行移动到一点M'，只要把(C)用以上方法展为平面曲线(C_0)，在点M_0取对应于a的向量a_0. 在点M_0'作按通常意义下的平行移动到M_0'的向量a_0，把这个平面图形施行扭曲变形使回到原曲面上来，则在M'点对应于M_0'处的a_0的向量就是所求的向量.

因为向量的长度与夹角对于展为平面的等距变换是不变的，所以由普通平行移动的性质推出：

在任一曲面曲线(C)上切于曲面的诸向量沿(C)平行移动时，这些向量的长度以及它们之间的夹角都保持不变.

现在我们从曲面上平行移动的观点来看测地线.

假定曲面曲线(C)的方程为$u^i=u^i(s)$，其中s为(C)的弧长. 设曲线(C)的切向量$\left(\frac{du^1}{ds},\frac{du^2}{ds}\right)$沿$(C)$平行移动，以$\frac{du^1}{ds}=a^1$，$\frac{du^2}{ds}=a^2$代入(2.80)（注意，这时(2.80)中的参数$t$换成$s$），则变为方程

$$\frac{d^2u^k}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=0 \qquad (i,j,k=1,2)$$

这是测地线的微分方程，反过来也成立. 总之，曲线(C)为测地线的充要条件是它的切向量在勒维-其维塔平行移动的意义下沿(C)是互相平行的.

测地线的这个性质跟普通空间中（或平面上）的直线的性质是相仿的. 因为直线有固定的方向，也就是在直线上任何一点沿直线的向量总跟这条直线是同方向的.

根据测地线的上述性质，如果要沿测地线平行移动一个长度一定的向量，只要把这个向量与已知测地线在移动过程中保持交于一个定角就可以得到. 显然，直线也有这个相仿的性质.

6.7 *极小曲面

现在我们讨论平均曲率$H\equiv 0$的曲面. 先考虑以下极值问题：设(C)是一空间光滑闭曲线，S是过(C)的一曲面，它的参数

表示是

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2) \qquad (\alpha=1,2,3)$$

给定 x^α 和$\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}(\alpha=1,\ 2,\ 3,\ i=1,\ 2)$的函数 $L\left(x^\alpha, \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right)$, 考虑积分

$$I = \iint_U L\left(x^\alpha, \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right) du^1 du^2$$

其中U是S 中(C)所包围的曲面区域.

现在问：过曲线(C) 的曲面S 满足什么条件才使积分I 取局部极小值?

考虑过曲线(C)的与S 邻近的曲面

$$\bar{S}:\ \bar{x}^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2) + \varepsilon w^\alpha(u^1, u^2)$$

其中 w^α 是沿曲线(C)为零的 C^∞ 类函数.

设 $\bar{S}$ 上由曲线(C)所包围的曲面区域是 $\bar{U}$, 则有积分

$$\bar{I} = \iint_{\bar{U}} L\left(x^\alpha + \varepsilon w^\alpha, \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} + \varepsilon \frac{\partial w^\alpha}{\partial u^i}\right) du^1 du^2$$

$$(\alpha=1,2,3;\ i=1,2)$$

由于$I = \min\limits_{\varepsilon} \bar{I}$, 所以

$$\left.\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{2.81}$$

或

$$\iint_U \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} w^\alpha + \sum_i \frac{\partial L}{\partial x^\alpha_{,i}} \frac{\partial w^\alpha}{\partial u^i}\right) du^1 du^2 = 0$$

其中 $x^\alpha_{,i} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}$.

上式又能改写成

$$\iint_U \sum_\alpha w^\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}-\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha_{;i}}\right)\right]du^1du^2$$

$$+\iint_U \sum_\alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(w^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha_{;i}}\right)du^1du^2=0 \qquad (2.81)'$$

根据 Green 公式

$$\iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial u^1}-\frac{\partial P}{\partial u^2}\right) du^1du^2=\int_C P(u^1,u^2)du^1+Q(u^1,u^2)du^2$$

所以有

$$\iint_U \sum_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(w^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha_{;1}}\right)+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(w^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha_{;2}}\right)\right]du^1du^2$$

$$=\sum_\alpha \int_C -\left(w^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha_{;2}}\right)du^1+\left(w^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha_{;1}}\right)du^2$$

因为 w^α 沿曲线(C)为零，所以上述积分为零，又因为函数 w^α 是任意的，所以极值条件(2.81)或(2.81)′转化成

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha_{;i}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}=0$$

这就是使积分 I 取局部极小值的条件，又称为欧拉方程.

现在我们希望寻找使(C) 所包围的曲面区域U的面积为极小的曲面 S，这种曲面也称为极小曲面.

这时积分 I 就是曲面域S 上曲线(C)所包围的区域U的面积

$$A=\iint_U \sqrt{g}\,du^1du^2$$

其中 $g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2$.

因为 $L=\sqrt{g}$，所以欧拉方程变成

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha_{;i}}\right)-\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha}=0 \qquad (\alpha=1,2,3;\ i=1,2)$$

根据定义

$$g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=\sum_{\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}\qquad(\alpha=1,2,3;\ i,j=1,2)$$

所以有

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha_{,i}}=\sum_{j,k}\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial g_{jk}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha_{,i}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial g}{\partial g_{ii}}x^\alpha_{,i}+\sum_{j\neq i}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}x^\alpha_{,j}\right)$$

$$=\sqrt{g}\left(g^{ii}x^\alpha_{,i}+\sum_{j\neq i}g^{ij}x^\alpha_{,j}\right)=\sum_j\sqrt{g}\,g^{ij}x^\alpha_{,j}$$

$$(\alpha=1,2,3;\ i,j,k=1,2)$$

因而

$$\sum_i\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha_{,i}}\right)=\sum_{i,j,k}\sqrt{g}\Big[g^{ij}x^\alpha_{,j}\Gamma^k_{ki}+x^\alpha_{,j}(-g^{kj}\Gamma^i_{ki}$$

$$-g^{ik}\Gamma^j_{ki})+g^{ij}\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial u^i\partial u^j}\Big]$$

$$=\sum_{i,j}\sqrt{g}\,g^{ij}\left(\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial u^i\partial u^j}-\sum_k\Gamma^k_{ji}x^\alpha_{,k}\right)=\sum_{i,j}\sqrt{g}\,g^{ij}L_{ij}n^\alpha$$

$$(\alpha=1,2,3;\ i,j,k=1,2)$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n^1,n^2,n^3)$是曲面$S$的单位法向量，最后一等式得自曲面论的高斯方程 $\boldsymbol{r}_{ij}=\sum_k\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{r}_k+L_{ij}\boldsymbol{n}$. 又因 $\sqrt{g}=\sqrt{\left|\sum_\alpha x^\alpha_{,i}x^\alpha_{,j}\right|}$ 不含 x^α，所以

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha}=0$$

而平均曲率$H=\frac{1}{2}\sum_{i,j}g^{ij}L_{ij}$，因此面积$A$为极小的欧拉方程简化成

$$H=0$$

于是得到

定理 对于过空间光滑闭曲线(C)的曲面S来说，如果(C)所包围的曲面面积最小，则曲面S的平均曲率恒等于零．换言之，极小曲面的平均曲率为零．

附记：定理中提出的极小曲面问题在1866年由J. Plateau提出，又称为Plateau问题．1930年J. Douglas和T. Rado分别独立地证明了解的存在性，不过他们的解中可能有孤立奇点，到了1970年，R. Osserman证明了Plateau问题的解没有奇点．

习　题

1　求正交网的坐标曲线的测地曲率．

2　求证旋转面的子午线是测地线，而平行圆仅当子午线的切线平行于旋转轴时才是测地线．

3　求证：

(1) 如果测地线同时为渐近线，则它是一直线．

(2) 如果测地线同时为曲率线，则它是一平面曲线．

4　如果在曲面上引进半测地坐标网：

$$ds^2=du^2+Gdv^2$$

求证：

$$k_g ds=d\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)\right]+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}dv$$

5　给出曲面的第一基本形式是

$$ds^2=du^2+G(u,v)dv^2$$

如果此曲面上的测地线与u-曲线交于角α时，求证

$$\frac{d\alpha}{dv}=-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

§7 常高斯曲率的曲面

7.1 常高斯曲率的曲面

在曲面 S

$$r = r(u, v)$$

上选一条测地线作为 v-曲线: $u=0$; 再取与它正交的测地线族作为u-曲线，测地线族的正交轨线作为 v-曲线，对于这样的半测地坐标网,曲面的第一基本形式简化为

$$\mathrm{I} = du^2 + G(u, v)dv^2$$

其中 $G(0, v)=1$, $G_u(0, v)=0$.

根据 §5的习题知,对于半测地坐标网来说,曲面的高斯曲率是

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

现在设曲面S的高斯曲率是常数，即 $K=$常数，则得微分方程

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} + K\sqrt{G} = 0$$

根据初始条件: $G(0, v)=1, G_u(0, v)=0$, 我们可以按以下不同情形求出这个微分方程的解.

(1) 正常数高斯曲率的曲面($K>0$), 此时

$$\sqrt{G} = A(v)\cos\sqrt{K}u + B(v)\sin\sqrt{K}u$$

根据初始条件 $A(v)=1$, $B(v)=0$.

所以有

$$\mathrm{I} = du^2 + \cos^2\sqrt{K}u dv^2$$

实例: 考虑球心在原点， 半径为 R 的球面. 取赤道为最初给定的测地线，则所有经线是与赤道正交的测地线，所有纬线是这测地线族的正交轨线，因此球面上的经线和纬线构成半测地坐

标网.

设球面上点的经度为 u, 纬度为 v, 则球面的参数表示是

$$\begin{cases}x=R\cos u\cos v\\ y=R\cos u\sin v\\ z=R\sin u\end{cases}$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=R^2du^2+R^2\cos^2 u dv^2$$

在球面上重新选择参数,命

$$\bar{u}=Ru,\quad \bar{v}=Rv$$

则

$$\mathrm{I}=d\bar{u}^2+\cos^2\frac{\bar{u}}{R}d\bar{v}^2$$

高斯曲率 $K=-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial\bar{u}^2}=-\dfrac{1}{\cos\dfrac{\bar{u}}{R}}\left[\cos\dfrac{\bar{u}}{R}\right]''=\dfrac{1}{R^2}$

于是得到

$$\mathrm{I}=d\bar{u}^2+\cos^2(\sqrt{K}\bar{u})d\bar{v}^2$$

因此正常数高斯曲率的曲面的第一基本形式与球面相同.

(2) $K=0$, 从而有 $\sqrt{G}=1$, 因此

$$\mathrm{I}=du^2+dv^2$$

所以零高斯曲率的曲面(可展曲面)的第一基本形式与平面相同.

(3) 负常数高斯曲率的曲面($K<0$), 此时

$$\mathrm{I}=du^2+\cosh^2(\sqrt{-K}u)dv^2$$

这种情形我们在下一小节中再详细讨论.

7.2 伪球面

现在我们构造一种负常数高斯曲率的曲面.

我们首先定义 Oxz 平面上的曳物线(tractrix)如下:

定义 设曲线(C) 上任意一点的切线上介于切点和 z 轴之间的线段始终保持定长 a, 则此曲线称为曳物线. z 轴称为曳物线的

渐近线.

下面我们来推导曳物线的方程. 设它的参数表示为

$$x=x(t),\quad z=z(t)$$

曲线上一点 $P(x,z)$ 的切线上点的坐标是 $\left(x+\alpha\frac{dx}{dt}, z+\alpha\frac{dz}{dt}\right)$, 其中 α 是参数. 如果这点在 z 轴上, 则

$$x+\alpha\frac{dx}{dt}=0,\quad \text{即}\quad \alpha=-x\bigg/\frac{dx}{dt}$$

所以曲线在 $P(x,z)$ 点的切线与 z 轴的交点 Q 的坐标是

$$\left(0,\ z-\frac{x\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right).$$

因为 $|PQ|=a$, 所以

$$x^2+x^2\left(\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2=a^2$$

由此得出

$$dz=\pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$$

如果命 $x=a\sin t$, 则

$$dz=\pm\frac{a\cos t}{a\sin t}\cdot a\cos t\,dt=\pm a\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=\pm a\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)dt$$

所以

$$z=+a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)$$

因此, Oxz 平面上以 z 轴为渐近线的曳物线方程是

$$\begin{cases}x=a\sin t\\ z=\pm a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\cos t\right)\end{cases}$$

如果把上述曳物线绕 z 轴旋转，所得的旋转面称为伪球面（图 2-34），它的参数表示是

$$\begin{cases} x=a\sin t\cos\theta \\ y=a\sin t\sin\theta \\ z=\pm a\left(\ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\cos t\right) \end{cases}$$

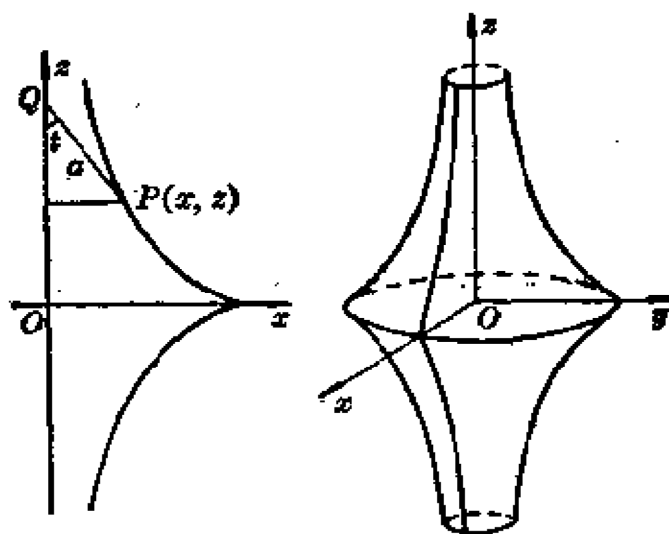


图 2-34

下面我们来计算伪球面的第一基本形式，并证明它的高斯曲率是负常数.

$$\mathrm{I}=ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

$$=(a\cos t\cos\theta dt-a\sin t\sin\theta d\theta)^2+(a\cos t\sin\theta dt$$

$$+a\sin t\cos\theta d\theta)^2+a^2\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)^2dt^2$$

$$=a^2\cos^2 t dt^2+a^2\sin^2 t d\theta^2+\left(\frac{a^2}{\sin^2 t}-2a^2+a^2\sin^2 t\right)dt^2$$

由此得到

$$\mathrm{I}=a^2\operatorname{ctg}^2 t dt^2+a^2\sin^2 t d\theta^2$$

改变曲面的参数，命

$$u=a\ln\sin t,\quad v=\theta$$

则

$$du = a\operatorname{ctg} t\,dt, \quad \sin t = e^{\frac{u}{a}}$$

所以伪球面的第一基本形式是

$$\mathrm{I} = du^2 + a^2 e^{\frac{2u}{a}} dv^2$$

因此对于参数(u, v)的坐标网是半测地坐标网，u-曲线($v=$常数)是测地线族.

伪球面的高斯曲率是

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = -\frac{1}{e^{u/a}}\cdot(e^{u/a})'' = -\frac{1}{a^2}$$

下面我们要把伪球面经过保角变换映到平面上，并讨论经过保角变换后，伪球面上的测地线对应平面上的什么曲线？为此，我们再改变伪球面的参数.

命

$$x = v, \quad y = e^{-u/a}$$

则

$$dv = dx, \quad du = -\frac{a\,dy}{y}$$

伪球面的第一基本形式又可改写成

$$ds^2 = \frac{a^2}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

因此从曲面上的点 (u, v) 到平面上的点 (x, y) 的映射是一保角变换.

对于伪球面上的新参数(x, y)和上述第一基本形式，我们来计算一下测地线的公式

$$\ddot{u}^i + \sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k = 0$$

其中 $u^1 = x$, $u^2 = y$.

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -1/y, \quad \Gamma^1_{22} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = 1/y, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = -1/y$$

所以测地线的方程是

$$\begin{cases}\ddot{x}-\dfrac{2\dot{x}\dot{y}}{y}=0\\ \ddot{y}+\dfrac{\dot{x}^2-\dot{y}^2}{y}=0\end{cases}$$

从第一式得到

$$\frac{\ddot{x}}{y^2}-\frac{2\dot{x}\dot{y}}{y^3}=0$$

即

$$\left(\frac{\dot{x}}{y^2}\right)^{\cdot}=0$$

所以

$$\dot{x}=\alpha y^2 \qquad (\alpha\text{为常数})$$

从第二式得到

$$\frac{\ddot{y}}{y}-\frac{\dot{y}^2}{y^2}+\frac{\dot{x}^2}{y^2}=0$$

即

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{\cdot}+\frac{\dot{x}^2}{y^2}=0$$

把$\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{\alpha}{\dot{x}}$代入上式，得到

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{\cdot}+\alpha\dot{x}=0$$

则有

$$\frac{\dot{y}}{y}+\alpha x=\beta \qquad (\beta\text{为常数})$$

因为

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha y^2\\ \dot{y}=(-\alpha x+\beta)y\end{cases}$$

所以有

$$\frac{dy}{dx}=\dot{y}/\dot{x}=\frac{-\alpha x+\beta}{\alpha y}$$

或

$$(\alpha x-\beta)dx+\alpha ydy=0$$

积分得到

$$\frac{1}{2}\alpha x^2-\beta x+\frac{1}{2}\alpha y^2=\gamma \qquad (\gamma=\text{常数})$$

把上式整理后，最后得到形如

$$(x-c)^2+y^2=r^2$$

的方程．这是 Oxy 平面上圆心在 x 轴上的圆的方程．于是得到

命题 通过伪球面的第一基本形式

$$\mathrm{I}=\frac{a^2}{y^2}(dx^2+dy^2)$$

把它经过保角变换映到平面上，则伪球面上的测地线对应于圆心在 x 轴上的圆．

下面我们仅考虑 Oxy 平面上在 x 轴上方的半平面($y\geqslant 0$)，我们称它为罗氏平面．伪球面上的测地线经过保角变换映成罗氏平面上圆心在 x 轴上的半圆，我们把这半圆称为**罗氏直线**．注意，过罗氏平面上任两点 P_1 和 P_2，正好有一条罗氏直线连结它们，通过保角变换，过伪球面上任两点，也就有唯一一条测地线连结它们．

7.3 罗氏几何

(1) 罗氏平面上的长度

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是罗氏平面上的两点，通过保角变换，它们对应伪球面上两点，连结这两点有唯一一条测地线，我们把这两对应点之间的测地线的弧长定义为 P_1 到 P_2 的罗氏距离．所以，

$$s(P_1,P_2)=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}ds=a\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$$

积分沿着$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$对应的伪球面上的两点之间的唯一的测地线进行．注意测地线的方程是

$$(x-c)^2+y^2=r^2$$

作参数变换

$$x=c+r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

命

$$x_1=c+r\cos\theta_1,\quad y_1=r\sin\theta_1$$
$$x_2=c+r\cos\theta_2,\quad y_2=r\sin\theta_2$$

则

$$s(P_1,P_2)=a\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=a\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\sin\theta}$$
$$=a\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}=a\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}$$

设罗氏直线P_1P_2与x轴的交点为P_0和P_∞，由于这四点在一圆上，我们可以定义它们的非调和比$(P_1,P_2;P_0,P_\infty)$．

任取圆上一点S，定义

$$(P_1,P_2;P_0,P_\infty)=\frac{\sin\angle P_1SP_0}{\sin\angle P_2SP_0}:\frac{\sin\angle P_1SP_\infty}{\sin\angle P_2SP_\infty}$$

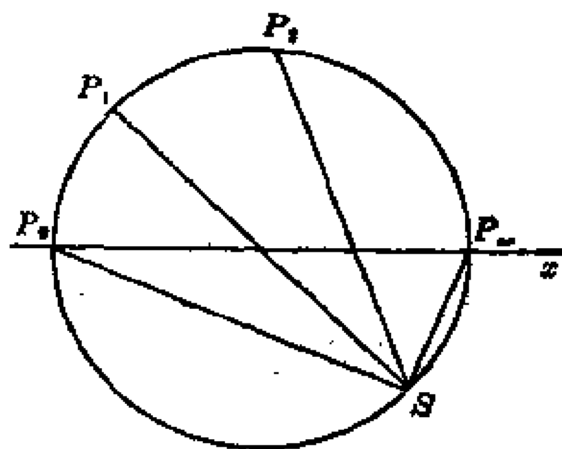


图 2-35

所以

$$(P_1,P_2;P_0,P_\infty)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_2}{2}\right)}:\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_2}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta_1}{2}}{\cos\frac{\theta_2}{2}}:\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_2}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}$$

因此罗氏距离公式是

$$s(P_1,P_2)=a\ln(P_1,P_2;P_0,P_\infty)$$

小结 设 P_1 和 P_2 是罗氏平面上两点，过这两点作圆交 x 轴于 P_0, P_∞, 则定义 P_1 和 P_2 之间的罗氏距离为

$$s(P_1,P_2)=a\ln(P_1,P_2;P_0,P_\infty)$$

其中非调和比 $(P_1,P_2;P_0,P_\infty)$ 定义为

$$(P_1,P_2;P_0,P_\infty)=\frac{\sin\angle P_1SP_0}{\sin\angle P_2SP_0}:\frac{\sin\angle P_1SP_\infty}{\sin\angle P_2SP_\infty}$$

这里 S 为过 P_1 和 P_2, 圆心在 x 轴上的圆上的任一点.

注意, 当 $P_1\to P_\infty$ 或 $P_2\to P_0$ 时, $(P_1,P_2;P_0,P_\infty)\to\infty$, 所以可以认为 x 轴上的点 P_0 或 P_∞ 是罗氏平面上的"无穷远点", 也就是说, x 轴是罗氏平面的"无穷远线".

(2) 罗氏平面上的平行线

罗氏平面上的直线 l 就是圆心在 x 轴上的 x 轴上方的半圆, 它交 x 轴于 P_0 和 P_∞ 两点.

设 P 是罗氏平面上在直线 l 外的任一点, 则过 P 和 P_0 有一条罗氏直线 l_0, 过 P 和 P_∞ 有一条罗氏直线 l_∞, 直线 l 与直线 l_0 交于"无穷远点"P_0, 因此可以认为直线 l 和 l_0 是平行的; 同理, 直线 l 和 l_∞ 是平行的(图 2-36).

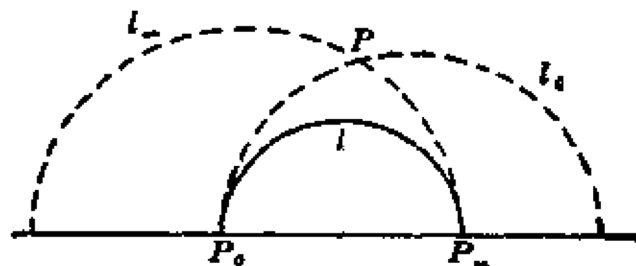


图 2-36

因此在罗氏平面上，过直线 l 外一点 P 可以作两条直线 l_0 和 l_∞ 平行于直线 l，因而在罗氏平面上欧几里得几何的平行公理不成立.

(3) 罗氏平面上的运动

把定义了笛卡儿直角坐标(x, y)的平面看成复平面，平面上的点(x, y)对应一个复数

$$z=x+iy$$

罗氏平面对应于 $y\geqslant 0$ 的上半复平面，在复平面上作线性变换

$$z^*=\frac{pz+q}{rz+s}$$

其中 p, q, r, s 是实数，且$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}>0$，这是复平面上的保角变换，它使上半复平面变成上半复平面.

现在我们来讨论：$ds^2=\frac{a^2}{y^2}(dx^2+dy^2)$在上述线性变换下变成什么.

$$dz^*=\frac{(ps-qr)dz}{(rz+s)^2},\quad d\bar{z}^*=\frac{(ps-qr)d\bar{z}}{(r\bar{z}+s)^2}$$

其中 $\bar{z}$ 和 $\bar{z}^*$ 分别表示 z 和 z^*的共轭复数.

$$dz^*d\bar{z}^*=\frac{(ps-qr)^2dzd\bar{z}}{(rz+s)^2(r\bar{z}+s)^2}$$

但是

$$y^*=\frac{1}{2i}(z^*-\bar{z}^*)=\frac{1}{2i}\left(\frac{pz+q}{rz+s}-\frac{p\bar{z}+q}{r\bar{z}+s}\right)$$

$$=\frac{(ps-qr)}{(rz+s)(r\bar{z}+s)}\cdot\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

即

$$y^*=\frac{ps-qr}{(rz+s)(r\bar{z}+s)}y$$

所以

$$a^2\frac{dz^*d\bar{z}^*}{y^{*2}}=a^2\frac{dz\cdot d\bar{z}}{y^2}$$

即

$$\frac{a^2}{y^{*2}}(dx^{*2}+dy^{*2})=\frac{a^2}{y^2}(dx^2+dy^2)$$

或

$$ds^{*2}=ds^2$$

因此线性变换

$$z^*=\frac{pz+q}{rz+s},\quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}>0$$

保持罗氏距离不变，它就是罗氏平面上的等距变换公式.

在十九世纪初，罗巴契夫斯基（Лобацевский Н. И），波利埃（J. Bolyai），高斯（C. F. Gauss）大胆地否定了欧氏几何中的平行公理，另外设立一条替代它的公理．他们分别独立地建立了一种新的几何学，称为双曲几何学．由于最先公开发表的是罗巴契夫斯基，所以也称此几何学为罗巴契夫斯基的非欧几何学，简称罗氏几何．

后来（1868）贝尔脱拉米（E. Beltrami）用微分几何的理论建立了罗氏几何的模型，那就是上述的“在一伪球面上，即高斯曲率等于$-\frac{1}{a^2}$的一个曲面上，把测地线看作直线而构成的几何”．另一方面，黎曼（B. Riemann）发展了罗巴契夫斯基的思想（1854），建立了与欧氏几何学和双曲几何学都不同的椭圆几何学．双曲几何学与椭圆几何学总称为非欧几何学．

第三章　外微分形式和活动标架

§1　外微分形式

1.1　格拉斯曼(Grassmann)代数

设V是实数域R上的n维向量空间，它的一组基底是$e_1, \cdots, e_n$，用这组基底形式地作下列元素

$$\begin{array}{ll} e_i, & i=1, \cdots, n \\ e_i \wedge e_j, & 1 \leqslant i < j \leqslant n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} & 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n & \end{array}$$

连同R中的单位元素1，一共有

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$$

个元素．用这2^n个元素作基底，再作一实数域R上的2^n维向量空间$G(V)$．其中以C_n^p个元素

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \qquad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$$

为基底的实向量空间记成V^p，它是$G(V)$的子空间，它的元素称为$G(V)$的p次齐次元素，它们可以具体表示成

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_1 i_2 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

其中系数$a_{i_1 i_2 \cdots i_p} \in R$．以后为了方便起见，我们把$R$写成$V^0$，把$V$写成$V^1$，于是$G(V)$中任何一个元素$w$可以唯一地表示成

$$w=w_0+w_1+\cdots+w_n$$

其中$w_p \in V^p (p=0, 1, \cdots, n)$．这说明$2^n$维向量空间$G(V)$是$C_n^p$维

向量空间 $V^p(p=0,1,\cdots,n)$ 的直和，记成

$$G(V)=V^0\oplus V^1\oplus\cdots\oplus V^n$$

注意

$$V^n\cong R$$

因为 V^n 的任何一个元素可以表示成

$$ae_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n,\quad a\in R$$

这个元素一一对应于实数 a，这个对应关系建立了1维向量空间 V^n 与 R 之间的同构。

实例：设 V 是 R 上的3维向量空间，$\{e_1,e_2,e_3\}$ 是它的一组基底，则

$$G(V)=V^0\oplus V^1\oplus V^2\oplus V^3$$

其中

$$V^0=R,\quad V^1=V$$

V^2 是 $e_1\wedge e_2$，$e_2\wedge e_3$，$e_3\wedge e_1$ 为基底的3维实向量空间．V^3 是以 $e_1\wedge e_2\wedge e_3$ 为基底的1维实向量空间，它同构于 R，所以 $G(V)$ 是8维实向量空间．

下面我们在向量空间 $G(V)$ 中引进一种乘法，使它成为一个代数，这种乘法只须在基底上定义，然后再线性地扩充到整个 $G(V)$ 上去．

定义 在 $G(V)$ 中引进乘法"$\wedge$"，规定它满足以下规律

$$e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i$$

$$(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})\wedge(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_q})=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\wedge e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_q}$$

同时又满足结合律和分配律

$$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)=x\wedge y\wedge z$$

$$x\wedge(ay+bz)=ax\wedge y+bx\wedge z$$

$$(ax+by)\wedge z=ax\wedge z+by\wedge z$$

这种乘法称为**外乘**．定义了外乘以后的 $G(V)$ 称为实向量空间 V

上的格拉斯曼代数。

附记：

(1) 对于每一个 $x\in V^1(=V)$，我们有

$$x\wedge x=0$$

设 $x=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$，因为 $e_i\wedge e_i=0$，所以

$$\begin{aligned}x\wedge x&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^{n}a_je_j\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}a_ia_je_i\wedge e_j\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_je_i\wedge e_j+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}a_ia_je_i\wedge e_j\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j(e_i\wedge e_j+e_j\wedge e_i)=0\end{aligned}$$

(2) 外乘的定义要求 $G(V)$ 的基底是线性无关的。我们举例说明这一点，设

$$ae_1\wedge e_3+be_2\wedge e_4\wedge e_5+ce_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4=0$$

把上式乘以 $e_2\wedge e_4\wedge e_5\wedge\cdots\wedge e_n$，则易知 $a=0$. 同理可证 $b=0$ 和 $c=0$，因此 $e_1\wedge e_3$，$e_2\wedge e_4\wedge e_5$ 和 $e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$ 是线性无关的.

格拉斯曼代数满足以下反交换律：

命题 1 设 $x\in V^p$，$y\in V^q$，则

$$x\wedge y=(-1)^{pq}y\wedge x$$

证明 因为外乘是满足分配律的，所以只须考虑

$$x=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\quad y=e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_q}$$

的情形. 这时

$$(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})\wedge(e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_q})$$

$$=(-1)^{p}e_{j_1}\wedge(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})\wedge(e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_q})$$
$$=(-1)^{pq}(e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_q})\wedge(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})$$

设 $y_1,\cdots,y_p$ 是 V 中一组向量，则它们可以表示成

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j \qquad (i=1,\cdots,p)$$

命题 2

$$y_1\wedge\cdots\wedge y_p=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\begin{vmatrix}a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p}\end{vmatrix}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

证明

$$y_1\wedge\cdots\wedge y_p=\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n}a_{1i_1}\cdots a_{pi_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

这说明 $y_1\wedge\cdots\wedge y_p\in V^p$，但是 V^p 中的基底是

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p} \qquad (1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n)$$

因此，我们必须把任意次序的外积 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ 变成标准次序的外积 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}(i_1<\cdots<i_p)$。因而我们在计算和式 $\sum\limits_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n}$ 时应分两步走：先从 $(1,\cdots,n)$ 中任选 p 个数 $i_1<\cdots<i_p$，然后再把这 p 个数任意排列，因此

$$y_1\wedge\cdots\wedge y_p$$
$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\left(\sum_{(i_1,\cdots,i_p)}(-1)^{[i_1,\cdots,i_p]}a_{1i_1}\cdots a_{pi_p}\right)e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

其中 $\sum\limits_{(i_1,\cdots,i_p)}$ 表示对 $(i_1,\cdots,i_p)$ 的任意排列求和，$[i_1,\cdots,i_p]$ 表示某排列对于顺序 $i_1<\cdots<i_p$ 的反序数。于是得到

$$y_1\wedge\cdots\wedge y_p=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\begin{vmatrix}a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p}\end{vmatrix}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

推论 1 V 中的向量 $y_1, \cdots, y_p$ 是线性无关的必要和充分条件是

$$y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \neq 0$$

证明 如果 $y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \neq 0$, 则矩阵 (a_{ij}) $(i=1, \cdots, p;\ j=1, \cdots, n)$ 中总有一个 p 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \neq 0$$

即矩阵(a_{ij})的秩为 p. 这说明向量组 $y_1, \cdots, y_p$ 是线性无关的. 反之, 如果向量组 $y_1, \cdots, y_p$ 线性无关, 则矩阵(a_{ij})的秩为 p. 这说明总有一个上述 p 阶行列式不为零, 所以 $y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \neq 0$.

推论 2 设 $y_1, \cdots, y_n$ 是 V 的另一组基底, 并且

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \qquad (i=1, \cdots, n)$$

则有

$$y_1 \wedge \cdots \wedge y_n = \det(a_{ij})\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

其中 $\det(a_{ij}) \neq 0$ 表示矩阵(a_{ij})的行列式.

附记: 如果 $\det(a_{ij}) > 0$, 则我们说 V 的两组基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 和 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 的定向是相同的.

实例: 仍设 V 是 3 维实向量空间, y_1, y_2, y_3 是 V 的另一组基, 并且

$$y_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} e_j \qquad (i=1, 2, 3)$$

则有

$$y_1 \wedge y_2 = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3)$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} e_1\wedge e_2+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} e_2\wedge e_3$$

$$+\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} e_3\wedge e_1$$

$$y_1\wedge y_2\wedge y_3=(a_{11}e_1+a_{12}e_2+a_{13}e_3)\wedge(a_{21}e_1+a_{22}e_2+a_{23}e_3)\wedge (a_{31}e_1+a_{32}e_2+a_{33}e_3)$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} e_1\wedge e_2\wedge e_3$$

如果 $\det(a_{ij})>0$, 则线性变换 $y_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}e_j(i=1, 2, 3)$保持基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{y_1, y_2, y_3\}$ 的定向.

1.2 外微分形式

在上一小节中，如果把向量空间 V 的系数域 R 换成带单位元素的交换环 K，则 V 称为环 K 上的模(module). 类似于上一小节, 从环 K 上的模 V 我们可以作出另外一个模 $G(V)$，并且可以类似地在这个模中引进外乘.

设 K 是定义在 R^n 的某开集 U 上的全体 C^∞-函数*) 所构成的环. 再设 R^n 中的坐标是$(x^1, \cdots, x^n)$, 系数属于 U 上的 C^∞-函数环 K, 以$(dx^1, \cdots, dx^n)$为基底的模为 V, 然后作 K 上的模

$$G(V)=V^0\oplus V^1\oplus\cdots\oplus V^n$$

其中

$$V^0=K,\quad V^1=V,\quad V^n\cong K$$

$V^p(p=1, \cdots, n)$中的元素可以表示成

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} a_{i_1\cdots i_p}(x^1, \cdots, x^n)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

---

*) C^∞-函数是在 U 上存在任何阶的连续偏导数的函数.

它们称为U上的p次外形式．特别地，$V^1=V$中的元素的具体表达式是

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}a_i(x^1,\cdots,x^n)dx^i=a_1(x^1,\cdots,x^n)dx^1+\cdots$$
$$+a_n(x^1,\cdots,x^n)dx^n$$

它们称为U上的**1次形式**，又称为U上的**发甫(Pfaff)形式**。

实例：(1) $n=1$的情形．设R中的坐标为x，则

0次形式是 $\omega_0=f(x)$

1次形式是 $\omega_1=\varphi(x)dx$

(2) $n=2$的情形．设R^2中的坐标是(x,y)，则

0次形式是 $\omega_0=f(x,y)$

1次形式是 $\omega_1=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

2次形式是 $\omega_2=\varphi(x,y)dx\wedge dy$

(3) $n=3$的情形．设R^3中的坐标是(x,y,z)，则

0次形式是 $\omega_0=f(x,y,z)$

1次形式是 $\omega_1=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$

2次形式是 $\omega_2=P(x,y,z)dy\wedge dz+Q(x,y,z)dz\wedge dx+R(x,y,z)dx\wedge dy$

3次形式是 $\omega_3=\varphi(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz$

设U是R^n中一开集，每一个U上的发甫形式

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}a_idx^i=a_1dx^1+a_2dx^2+\cdots+a_ndx^n$$

对应于U上一向量场$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$．给出一组发甫形式，如果它所对应的向量场在U的每一点处是线性无关的，则称这组发甫形式是**线性无关的**。

命题 3 (嘉当(Cartan)引理)　给出U上p个线性无关的发甫形式$f_1, f_2, \cdots, f_p (1 \leqslant p \leqslant n)$. 如果另有$U$上$p$个发甫形式$g_1, g_2, \cdots, g_p$, 使得

$$f_1 \wedge g_1 + f_2 \wedge g_2 + \cdots + f_p \wedge g_p = 0$$

则存在U上的C^∞-函数组$a_{ij}(i, j=1, \cdots, p)$使得下列关系式成立

$$g_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} f_j \qquad (i=1, \cdots, p)$$

并且

$$a_{ij} = a_{ji}$$

证明　我们可以在U上逐点证明此命题. 对于U上一固定点来说, 当$p=n$时, 由于$f_1, \cdots, f_n$线性无关, 因此可以选作V的基底, 这时有

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j \qquad (i=1, \cdots, n)$$

但是因为

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \wedge g_i = 0$$

所以

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i \wedge f_j = 0$$

由于$f_i \wedge f_i = 0, f_i \wedge f_j = -f_j \wedge f_i$, 所以

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_{ij} - a_{ji}) f_i \wedge f_j = 0$$

但是$f_i \wedge f_j (1 \leqslant i < j \leqslant n)$是$V^2$的基底, 因此线性无关, 所以

$$a_{ij} - a_{ji} = 0 \qquad (i, j=1, \cdots, n)$$

即

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j=1, \cdots, n)$$

当 $p<n$ 时，由于 $f_1,\cdots,f_p$ 线性无关，我们可以补充 $n-p$ 个发甫形式 $f_{p+1},\cdots,f_n$，使得 $f_1,\cdots,f_n$ 构成 V 的一组基底．于是有

$$g_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j \qquad (i=1,\cdots,p)$$

再设

$$g_{p+1}=\cdots=g_n=0,\ \ a_{ij}=0 \qquad (i=p+1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n)$$

则有

$$g_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j \qquad (i=1,\cdots,n)$$

并且

$$\sum_{i=1}^{n}f_i\wedge g_i=\sum_{i=1}^{p}f_i\wedge g_i=0$$

根据 $p=n$ 时的讨论

$$g_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j \qquad (i=1,\cdots,p)$$

并且

$$a_{ij}=a_{ji}$$

但是

$$a_{p+1,j}=\cdots=a_{n,j}=0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$

所以

$$a_{j,p+1}=\cdots=a_{j,n}=0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$

因此

$$g_i=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}f_j \qquad (i=1,\cdots,p)$$

其中

$$a_{ij}=a_{ji} \qquad (i,j=1,\cdots,p)$$

推论 给出两个U上的发甫形式f和g，如果$f\wedge g=0$，则存在U上的C^∞-函数a使得$g=af$.

现在我们在外形式模$G(V)$中引进一种微分运算，称为**外微分**. 引进了外微分以后，模$G(V)$的元素称为U上的**外微分形式**，V^p中的元素称为p次外微分形式，以后简称为p-形式。

定义 外微分是一映射

$$d: V^p \to V^{p+1}$$

它的定义如下：设$\omega_p\in V^p$，

$$\omega_p=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} a_{i_1\cdots i_p}(x^1,\cdots,x^n)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

我们规定

$$d\omega_p=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} da_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

显然$d\omega_p\in V^{p+1}$. 从此定义可以直接看出：如果$\omega\in V^0$，则外微分就是普通微分；如果$\omega\in V^n$，则$d\omega=0$，因为$dx^i\wedge dx^i=0$.

我们再把以上外微分运算的定义扩充到整个$G(V)$上。

定义 设$\omega\in G(V)$，并且

$$\omega=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n,\quad \omega_p\in V^p$$

则规定

$$d\omega=d\omega_0+d\omega_1+\cdots+d\omega_n$$

实例：(1) 考虑$n=1$的情形.

$$\omega_0=f(x),\quad d\omega_0=f'(x)dx$$

$$\omega_1=\varphi(x)dx,\quad d\omega_1=\varphi'(x)dx\wedge dx=0$$

(2) 考虑$n=2$的情形.

$$\omega_0=f(x,y),\quad d\omega_0=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\omega_1 = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$\omega_2 = \varphi(x,y)dx\wedge dy, \quad d\omega_2 = 0$$

(3) 考虑 $n=3$ 的情形。

$$\omega_0 = f(x,y,z)$$

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\omega_1 = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$\omega_2 = P(x,y,z)dy\wedge dz + Q(x,y,z)dz\wedge dx$$
$$+ R(x,y,z)dx\wedge dy$$

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dz\wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

$$\omega_3=\varphi(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz,\quad d\omega_3=0.$$

定理 1 设 G 是 R^n 中一 p 维区域($1\leqslant p\leqslant n$)，∂G 是 G 的边缘，ω 是 G 上的 $(p-1)$-形式，则下列公式成立

$$\int_{\partial G}\omega=\int_G d\omega$$

这个公式通常称为**斯托克斯(Stokes)公式**

我们不打算在这里证明此定理，因为它已超出了微分几何这门课程的范围，有兴趣的读者可以查阅多元微积分的书(例如，C. Goffman 著史济怀等译《多元微积分》，人民教育出版社 1978 年出版)。不过我们要指出，当 $n=2$ 或 3 时，普通微积分教程中已经证明斯托克斯公式是成立的。

$n=2$ 时，设 $p=2$，G 是平面 R^2 上一区域，∂G 是它的边缘闭曲线，再设 ω 是 1-形式，

$$\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$d\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

这时斯托克斯公式为

$$\int_{\partial G}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

这就是我们所熟悉的平面上的格林(Green)公式。

$n=3$ 时，设 $p=2$，则 G 是空间 R^3 中的曲面域，∂G 是它的边缘(空间)闭曲线. 再设 ω 是 1-形式，

$$\omega=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$d\omega=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

这时，斯托克斯公式为

$$\int_{\partial G} Pdx+Qdy+Rdz=\int_G\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

这就是我们在微积分教程中所见到的斯托克斯公式.

如果 $p=3$, 则 G 是空间 R^3 中一区域, ∂G 是它的边缘闭曲面. ω 是 2-形式

$$\omega=P(x,y,z)dy\wedge dz+Q(x,y,z)dz\wedge dx$$

$$+R(x,y,z)dx\wedge dy$$

$$d\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

这时, 斯托克斯公式为

$$\int_{\partial G} Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$$

$$=\int_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

这就是微积分教程中的高斯(Gauss)公式.

附记: 再考虑一下 $n=1$ 的情形, 这时 $p=1$, G 是实数轴 R 上一区间 $[a,b]$, ∂G 是它的端点 a 和 b, 不过要加上定向, b 端的外法向是正的, a 端的外法向是负的. ω 是 0-形式, 即函数 $f(x)$, 这时斯托克斯公式为

$$\int_a^b df(x)=f(b)-f(a)$$

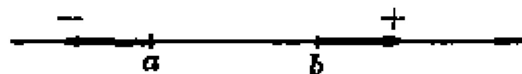


图 3-1

这就是微积分基本定理. 因此斯托克斯公式可以看成是一维的微积分基本定理在高维空间中的推广.

最后我们再证明两个外微分公式.

命题 4(Poincaré 引理) 设 $\omega\in G(V)$, 则

$$dd\omega=0$$

证明 根据外微分的定义, 只须考虑 ω 是 V^p 的单项式的情

形. 设

$$\omega=a_{i_1\cdots i_p}(x^1,\cdots,x^n)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$d\omega=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$d(d\omega)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j\partial x^i}dx^j\wedge dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$=\sum_{j<i}\left(\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i\partial x^j}\right)dx^j\wedge dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

因为

$$\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j\partial x^i}=\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i\partial x^j}$$

所以

$$dd\omega=0$$

命题 5 设 $\omega\in V^p$, $\theta\in V^q$, 则

$$d(\omega\wedge\theta)=d\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge d\theta$$

证明 根据外微分的定义, 只须考虑 ω 和 θ 是单项式的情形. 设

$$\omega=a(x^1,\cdots,x^n)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$\theta=b(x^1,\cdots,x^n)dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}$$

则

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge\theta)&=d(ab\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q})\\&=d(ab)\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}\\&=(da\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\wedge(b\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q})\\&\quad+a\,db\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}\\&=(da\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\wedge(b\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q})\\&\quad+(-1)^p(a\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\\&\quad\wedge(db\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q})\end{aligned}$$

$$=d\omega\wedge\theta+(-1)^{p}\omega\wedge d\theta$$

实例：设 $n=3$，R^3 的坐标是 (x,y,z)，ω 和 θ 是 R^3 中某开集 U 上的发甫形式

$$\omega=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$\theta=a(x,y,z)dx+b(x,y,z)dy+c(x,y,z)dz$$

$$d\omega=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$d(d\omega)=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}dx\wedge dy\wedge dz=0$$

$$d\theta=\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$
$$+\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$\omega\wedge\theta=(Qc-Rb)dy\wedge dz+(Ra-Pc)dz\wedge dx$$
$$+(Pb-Qa)dx\wedge dy$$

$$d(\omega\wedge\theta)=\left\{\frac{\partial}{\partial x}(Qc-Rb)+\frac{\partial}{\partial y}(Ra-Pc)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}(Pb-Qa)\right\}dx\wedge dy\wedge d$$
$$=\left\{a\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+b\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+c\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}dx\wedge dy\wedge dz-\left\{P\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+Q\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right\}dx\wedge dy\wedge dz$$
$$=d\omega\wedge\theta-\omega\wedge d\theta$$

1.3 弗罗皮尼斯(Frobenius)定理

考虑 R^3 中的一个发甫方程

$$\omega=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0$$

根据一阶偏微分方程理论(可参阅微分方程教程，例如，艾利斯哥尔兹著，南开大学数学系编译中队译，崔士英校《微分方程》(人民教育出版社)第六章 § 3)．如果它满足下列完全可积条件

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \qquad (*)$$

则存在 R^3 中的曲面

$$f(x,y,z)=\text{常数}$$

使得 $df=0$ 与发甫方程 $\omega=0$ 是等价的，即

$$df=\lambda(x,y,z)\omega$$

这曲面称为发甫方程 $\omega=0$ 的积分曲面．显然，过空间 R^3 中一点 (x_0,y_0,z_0)，只存在唯一积分曲面

$$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$$

现在我们要把发甫方程 $\omega=0$ 的完全可积条件改换一个形式。

$$d\omega=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

设 $R\neq0$，则

$$dz=\frac{\omega-Pdx-Qdy}{R}$$

所以

$$d\omega=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge\left(\frac{\omega-Pdx-Qdy}{R}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\left(\frac{\omega-Pdx-Qdy}{R}\right)\wedge dx$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$=\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)dx+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\right]\wedge\omega$$

$$+\frac{1}{R}\left\{P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}dx\wedge dy$$

因此条件(*)等价于存在一个发甫形式 θ 使得

$$d\omega=\theta\wedge\omega$$

这个等价条件就叫做发甫形式 ω 的弗罗皮尼斯条件。

反之，如果发甫形式

$$\omega=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

满足弗罗皮尼斯条件

$$d\omega=\theta\wedge\omega$$

其中 θ 是另外一个发甫形式

$$\theta=a(x,y,z)dx+b(x,y,z)dy+c(x,y,z)dz$$

则有

$$d\omega=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$\theta\wedge\omega=(bR-cQ)dy\wedge dz+(cP-aR)dz\wedge dx$$

$$+(aQ-bP)dx\wedge dy$$

根据弗罗皮尼斯条件，我们有

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=bR-cQ,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=cP-aR$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=aQ-bP$$

所以

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0$$

因此，发甫方程 $\omega=0$ 完全可积.

根据以上分析，我们可以得出以下结论：如果发甫形式 ω 满足弗罗皮尼斯条件，则发甫方程 $\omega=0$ 是完全可积的.

附记：设 $R(x, y, z)\neq 0$，把发甫方程 $\omega=0$ 改写成它的等价形式

$$dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy$$

它等价于一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{P}{R}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Q}{R}$$

如果此方程组有解，设它的解是

$$z=z(x, y, C)$$

因为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Q}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{P}{R}\right)$$

因而

$$\frac{-R\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+Q\left(\dfrac{\partial R}{\partial x}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{R^2}$$

$$=\frac{-R\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}+\dfrac{\partial P}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+P\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{R^2}$$

再把$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{P}{R}$和$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Q}{R}$代入上式，化简后立即得到发甫方程 $\omega=0$ 的完全可积条件(*)．因此，发甫方程 $\omega=0$ 的完全可积条件(*)就等价的一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{P}{R},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Q}{R}$$

的完全可积条件

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Q}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{P}{R}\right)$$

现在我们把上述例子推广到高维空间，以下我们假定

$$i,j=1,\cdots,n;\quad k,l,m,q=1,\cdots,p\quad (p<n)$$

设 R^{n+p} 中的坐标是 $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^p)$，考虑定义在 R^{n+p} 中某开集 U 上的 p 个线性无关的发甫形式

$$\omega^l(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^p)\equiv\sum_{i=1}^{n}\psi_i^l(x,y)dx^i$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\psi_{n+k}^l(x,y)dy^k\quad (l=1,\cdots,p)$$

它们确定了 U 上的发甫方程组

$$\omega^l=0\qquad (l=1,\cdots,p)$$

实例：当 $n=2$，$p=1$，则我们得到上面例子中的发甫方程 $\omega=0$。

如果存在 U 中某 n 维曲面 S

$$y^k=y^k(x^1,\cdots,x^n)\qquad (k=1,\cdots,p)$$

使得我们把上述方程中的函数 $y^k(x^1,\cdots,x^n)$ 代入发甫形式 ω^l $(l=1,\cdots,p)$ 以后，$\omega^l\equiv 0$，即

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i^l(x,y(x))dx^i+\sum_{k=1}^{p}\psi_{n+k}^l(x,y(x))\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}dx^i\right)\equiv 0$$

则曲面 S 就称为发甫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$ 的积分曲面．S 的

方程称为发甫方程组的解. 如果过U中任一点只存在唯一的积分曲面，则称发甫方程组是完全可积的. 下面我们将要给出发甫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$是完全可积的必要和充分条件.

设另有一组U上的发甫形式

$$\pi^l=\sum_{k=1}^{p}a_k^l(x,y)\omega^k \qquad (l=1,\cdots,p)$$

其中 $\det(a_k^l)\neq 0$, 则我们说发甫方程组

$$\pi^l=0 \qquad (l=1,\cdots,p)$$

与给定的发甫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$是等价的.

定义 U上的发甫形式 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$, 如果存在U上的发甫形式 $f_k^l(k,l=1,\cdots,p)$使得

$$d\omega^l=\sum_{k=1}^{p}f_k^l\wedge\omega^k \qquad (l=1,\cdots,p)$$

则称 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$是满足弗罗皮尼斯条件的.

命题 6 如果发甫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$和发甫方程组 $\pi^l=0(l=1,\cdots,p)$是等价的, 则其中一组发甫形式满足弗罗皮尼斯条件时另一组也满足此条件.

证明 设发甫形式 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$满足弗罗皮尼斯条件, 则存在发甫形式 $f_k^l(k,l=1,\cdots,p)$使得

$$d\omega^l=\sum_{k=1}^{p}f_k^l\wedge\omega^k \qquad (l=1,\cdots,p)$$

现在发甫方程组 $\pi^l=0(l=1,\cdots,p)$与发甫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$等价, 即存在函数 a_k^l 使得

$$\pi^l=\sum_{k=1}^{p}a_k^l\omega^k \qquad (l=1,\cdots,p)$$

其中 $\det(a_k^l)\neq 0$,

$$d\pi^l=\sum_{k=1}^{p}da_k^l\wedge\omega^k+\sum_{k=1}^{p}a_k^ld\omega^k$$

$$=\sum_{q=1}^{p}\Big(da_q^l+\sum_{k=1}^{p}a_k^lf_q^k\Big)\wedge\omega^q$$

从等式 $\pi^l=\sum_{k=1}^{p}a_k^l\omega^k$ 反解出

$$\omega^l=\sum_{k=1}^{p}b_k^l\pi^k \qquad (l=1,\cdots,p)$$

其中 $(b_k^l)=(a_k^l)^{-1}$. 则有

$$d\pi^l=\sum_{q,m=1}^{p}b_m^q(da_q^l+\sum_{k=1}^{p}a_k^lf_q^k)\wedge\pi^m$$

因此存在发甫形式

$$\bar{f}_m^l=\sum_{q=1}^{p}b_m^q(da_q^l+\sum_{k=1}^{p}a_k^lf_q^k)$$

使得发甫形式 $\pi^l(l=1,\cdots,p)$ 也满足弗罗皮尼斯条件

$$d\pi^l=\sum_{m=1}^{p}\bar{f}_m^l\wedge\pi^m \qquad (l=1,\cdots,p)$$

根据这个命题，当我们想解一个发甫方程组

$$\omega^l\equiv\sum_{i=1}^{n}\psi_i^l(x,y)dx^i+\sum_{k=1}^{p}\psi_{n+k}^l(x,y)dy^k=0 \qquad (l=1,\cdots,p)$$

的时候，我们可以先找出一个与它等价的而且形式上简单一些的发甫方程组 $\pi^l=0$，然后去解后者．由于发甫形式 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$ 是线性无关的，所以矩阵 $(\psi_j^l)(l=1,\cdots,p;j=1,\cdots,n+p)$ 的秩为 p，因此不妨假定 $\det(\psi_{n+k}^l)\neq0(k,l=1,\cdots,p)$．这时，我们可以从发甫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$ 解出

$$dy^l=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^l(x,y)dx^i \qquad (l=1,\cdots,p)$$

因此发甫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$ 等价于

$$\pi^l\equiv dy^l-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^l(x,y)dx^i=0 \qquad (l=1,\cdots,p)$$

现在,我们来计算发甫形式 $\pi^l(l=1,\cdots,p)$ 的弗罗皮尼斯条件

$$d\pi^l=ddy^l-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}dy^k\wedge dx^i$$

因为

$$dy^l=\pi^l+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^l dx^i \qquad (l=1,\cdots,p)$$

$$\begin{aligned}d\pi^l=&-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\pi^k\wedge dx^i\\&-\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k dx^j\wedge dx^i\\=&\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}dx^i\right)\wedge\pi^k+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left(-\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial x^j}+\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial x^i}\right)dx^j\wedge dx^i\\&+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left[\sum_{k=1}^{p}\left(-\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k+\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial y^k}\varphi_i^k\right)\right]dx^j\wedge dx^i\end{aligned}$$

这说明,要使发甫形式 π^l 满足弗罗皮尼斯条件, 即存在发甫形式 $\tilde{f}_k^l$ 使得

$$d\pi^l=\sum_{k=1}^{p}\tilde{f}_k^l\wedge\pi^k \qquad (l=1,\cdots,p)$$

必要和充分的条件是

$$\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial x^j}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k=\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial x^i}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial y^k}\varphi_i^k \qquad (i,j=1,\cdots,n)$$

这是发甫形式 π^l 的弗罗皮尼斯条件的另外一种表示形式.

现在我们来证明发甫方程组或一阶偏微分方程组的基本定理.

定理 2 (Frobenius) 设 R^{n+p} 的坐标是 $x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^p$, U 是 R^{n+p} 中一开集, $\omega^l(l=1, \cdots, p)$ 是 U 上 p 个发甫形式, 则发甫方程组

$$\omega^l \equiv \sum_{i=1}^{n} \psi_i^l(x, y) dx^i + \sum_{k=1}^{p} \psi_{n+k}^l(x, y) dy^k = 0 \qquad (l=1, \cdots, p)$$

其中 $\det(\psi_{n+k}^l) \neq 0$, 完全可积的必要和充分条件是发甫形式 $\omega^l(l=1, \cdots, p)$ 满足弗罗皮尼斯条件.

证明 必要性: 根据命题 6 后面的分析, 我们知道可以不直接去解发甫方程组 $\omega^l=0(l=1, \cdots, p)$, 而是解与它等价的发甫方程组

$$\pi^l \equiv dy^l - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^l(x, y) dx^i = 0 \qquad (l=1, \cdots, p)$$

后者又等价于一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^i} = \varphi_i^l(x, y) \qquad (i=1, \cdots, n; l=1, \cdots, p)$$

如果发甫方程组 $\omega^l=0(l=1, \cdots, p)$ 完全可积, 则上述一阶偏微分方程组也完全可积. 设积分曲面的方程是

$$y^l = y^l(x^1, \cdots, x^n) \qquad (l=1, \cdots, p)$$

因此

$$\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j \partial x^i} \qquad (i, j=1, \cdots, n; \ l=1, \cdots, p)$$

因为

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^i} = \varphi_i^l(x, y) \qquad (i=1, \cdots, n; l=1, \cdots, p)$$

所以

$$\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial x^i}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial y^k}\varphi_i^k=\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial x^j}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k$$

$$(i,j=1,\cdots,n;\quad l=1,\cdots,p)$$

这就是发甫形式 $\pi^l(l=1,\cdots,p)$ 的弗罗皮尼斯条件. 根据命题6, 发甫形式 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$ 也满足弗罗皮尼斯条件.

充分性: 用归纳法证明.

先设 $n=1$. 发甫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$ 等价于

$$\pi^l\equiv dy^l-\varphi^l(x,y^1\cdots,y^p)dx=0\qquad(l=1,\cdots,p)$$

对于这种情形,弗罗皮尼斯条件不起作用. 因为

$$d\pi^l=ddy^l-\frac{\partial\varphi^l}{\partial x}dx\wedge dx-\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi^l}{\partial y^k}dy^k\wedge dx$$

$$=-\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi^l}{\partial y^k}(\pi^k+\varphi^k dx)\wedge dx$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi^l}{\partial y^k}dx\wedge\pi^k$$

所以发甫形式 π^l 一定满足弗罗皮尼斯条件.

发甫方程组 $\pi^l=0(l=1,\cdots,p)$ 等价于常微分方程组

$$\frac{dy^l}{dx}=\varphi^l(x,y^1,\cdots,y^p)\qquad(l=1,\cdots,p)$$

根据常微分方程组解的存在唯一定理,给出初始条件:

$$x=x_0\text{时},y^l=y_0^l\quad(l=1,\cdots,p)$$

则上述常微分方程组存在唯一解

$$y^l=y^l(x)\qquad(l=1,\cdots,p)$$

设定理在 $n=r$ 时成立, 下面要证明: 当 $n=r+1$ 时定理也成立.

给出发甫方程组

$$\omega^l \equiv \sum_{i=1}^{r+1} \psi_i^l(x^1, \cdots, x^r, x^{r+1}, y^1, \cdots, y^p) dx^i$$

$$+\sum_{k=1}^{p} \psi_{n+k}^l(x^1, \cdots, x^r, x^{r+1}, y^1, \cdots, y^p) dy^k = 0 \quad (l=1, \cdots, p)$$

假定发甫形式 $\omega^l (l=1, \cdots, p)$ 满足弗罗皮尼斯条件:

$$d\omega^l = \sum_{k=1}^{p} f_k^l \wedge \omega^k \qquad (l=1, \cdots, p)$$

命 $\varpi^l = \omega^l|_{x^{r+1}=x_0^{r+1}} (l=1, \cdots, p)$, 则得发甫方程组

$$\varpi^l \equiv \sum_{i=1}^{r} \psi_i^l(x^1, \cdots, x^r, x_0^{r+1}, y^1, \cdots, y^p) dx^i$$

$$+\sum_{k=1}^{p} \psi_{n+k}^l(x^1, \cdots, x^r, x_0^{r+1}, y^1 \cdots, y^p) dy^k = 0 \quad (l=1, \cdots, p)$$

从发甫形式 $\omega^l (l=1, \cdots, p)$ 的弗罗皮尼斯条件，我们可以得到发甫形式 $\varpi^l (l=1, \cdots, p)$ 的弗罗皮尼斯条件

$$d\varpi^l = \sum_{k=1}^{p} \bar{f}_k^l \wedge \varpi^k \quad (l=1, \cdots, p)$$

其中 $\bar{f}_k^l = f_k^l|_{x^{r+1}=x_0^{r+1}}$. 根据归纳假设，发甫方程组 $\varpi^l = 0 (l= 1, \cdots, p)$ 完全可积，即给出初始条件

$$x^i = x_0^i \ (i=1, \cdots, r) \text{时}, y^k = y_0^k \ (k=1, \cdots, p)$$

存在唯一积分曲面

$$\bar{f}^l(x^1, \cdots, x^r, x_0^{r+1}, y^1, \cdots, y^p) = \bar{f}^l(x_0^1, \cdots, x_0^r, x_0^{r+1}, y_0^1, \cdots, y_0^p)$$
$$(l=1, \cdots, p)$$

即存在函数 $\bar{\lambda}_k^l(x^1 \cdots, x^r, x_0^{r+1}, y^1, \cdots, y^p) \ (l=1, \cdots, p)$ 使得

$$d\bar{f}^l(x^1, \cdots, x^r, x_0^{r+1}, y^1, \cdots, y^p)$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \bar{\lambda}_k^l(x^1, \cdots, x^r, x_0^{r+1}, y^1, \cdots, y^p) \varpi^k \qquad (l=1, \cdots, p)$$

把上式中的 x_0^{r+1} 改回成 x^{r+1}，命

$$\begin{aligned} & f^l(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p) \\ = & \bar{f}^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\big|_{x_0^{r+1}\to x^{r+1}} \\ & \lambda_k^l(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p) \\ = & \bar{\lambda}_k^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\big|_{x_0^{r+1}\to x^{r+1}} \end{aligned}$$

$$\omega^l=\varpi^l\big|_{x_0^{r+1}\to x^{r+1}}+\psi_{r+1}^l(x,y)dx^{r+1}$$

所以

$$\begin{aligned} & df^l(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p) \\ = & d\bar{f}^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\big|_{x_0^{r+1}\to x^{r+1}}+\frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}dx^{r+1} \\ = & \sum_{k=1}^{p}\bar{\lambda}_k^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\big|_{x_0^{r+1}\to x^{r+1}}\cdot\varpi^k\big|_{x_0^{r+1}\to x^{r+1}} \\ & +\frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}dx^{r+1} \\ = & \sum_{k=1}^{p}\lambda_k^l(x^1,\cdots,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\left[\omega^k-\psi_{r+1}^k(x,y)dx^{r+1}\right] \\ & +\frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}dx^{r+1} \end{aligned}$$

因此发甫方程组 $\omega^l=0\ (l=1,\cdots,p)$ 等价于发甫方程组

$$\begin{aligned} \pi^l\equiv & df^l(x^1,\cdots,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p)-\frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}dx^{r+1} \\ & +\sum_{k=1}^{p}\lambda_k^l(x^1,\cdots,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\psi_{r+1}^k(x,y)dx^{r+1}=0 \end{aligned}$$

现在我们作 R^{n+p} 中的坐标变换，命

$$\tilde{x}^i=x^i$$

$$\tilde{y}^k=f^k(x^1,\cdots,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\qquad(k=1,\cdots,p)$$

注意，

$$d\bar{f}^l = \sum_{m=1}^{p} \bar{\lambda}_m^l \varpi^m$$

$$\frac{\partial \bar{f}^l}{\partial y^k} = \sum_{m=1}^{p} \bar{\lambda}_m^l \bar{\psi}_{n+k}^m \qquad (k, l = 1, \cdots, p)$$

所以

$$\frac{\partial \tilde{y}^l}{\partial y^k} = \frac{\partial f^l}{\partial y^k} = \sum_{m=1}^{p} \lambda_m^l \psi_{n+k}^m \qquad (k, l = 1, \cdots, p)$$

因为 $\det(\psi_{n+k}^m) \neq 0$, 所以

$$\det\left(\frac{\partial \tilde{y}^l}{\partial y^k}\right) \neq 0$$

因此根据隐函数定理, 总可以解出

$$y^k = \varphi^k(x^1, \cdots, x^{r+1}, \tilde{y}^1, \cdots, \tilde{y}^p) \qquad (k = 1, \cdots, p)$$

这时发甫方程组 $\pi^l = 0 \quad (l = 1, \cdots, p)$ 变成

$$\tilde{\pi}^l \equiv d\tilde{y}^l - \tilde{\lambda}^l(x^1, \cdots, x^{r+1}, \tilde{y}^1, \cdots, \tilde{y}^p) dx^{r+1} = 0 \qquad (l = 1, \cdots, p)$$

其中

$$\tilde{\lambda}^l(x^1, \cdots, x^{r+1}, \tilde{y}^1, \cdots, \tilde{y}^p) = \frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}[x^1, \cdots, x^{r+1}, \varphi^1(x, \tilde{y}), \cdots, \varphi^p(x, \tilde{y})] - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^l [x^1, \cdots, x^{r+1}, \varphi^1(x, \tilde{y}), \cdots, \varphi^p(x, \tilde{y})] \cdot \psi_{r+1}^k [x^1, \cdots, x^{r+1}, \varphi^1(x, \tilde{y}), \cdots, \varphi^p(x, \tilde{y})]$$

发甫形式 $\tilde{\pi}^l$ 应满足弗罗皮尼斯条件

$$d\tilde{\pi}^l = dd\tilde{y}^l - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \tilde{\lambda}^l}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{r+1} - \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \tilde{\lambda}^l}{\partial \tilde{y}^k} d\tilde{y}^k \wedge dx^{r+1}$$

但是 $d\tilde{y}^k = \tilde{\pi}^k + \tilde{\lambda}^k dx^{r+1}$, 所以

$$d\tilde{\pi}^l = -\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \tilde{\lambda}^l}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{r+1} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \tilde{\lambda}^l}{\partial \tilde{y}^k} dx^{r+1} \wedge \tilde{\pi}^k$$

$$(l = 1, \cdots, p)$$

如果发甫形式 $\tilde{\pi}^l(l=1,\cdots,p)$满足弗罗皮尼斯条件

$$d\tilde{\pi}^l=\sum_{k=1}^{p}\tilde{j}_k^l\wedge\tilde{\pi}^k\qquad(l=1,\cdots,p)$$

则必须有

$$\frac{\partial\tilde{\lambda}^l}{\partial x^i}=0\qquad(i=1,\cdots,r;\ \ l=1,\cdots,p)$$

即 $\tilde{\lambda}^l$ 只是 x^{r+1}, $\tilde{y}^1$, $\cdots$, $\tilde{y}^p$ 的函数，所以发甫方程组 $\tilde{\pi}^l=0$ $(l=1,\cdots,p)$应写成

$$\tilde{\pi}^l\equiv d\tilde{y}^l-\tilde{\lambda}^l(x^{r+1},\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^p)dx^{r+1}=0\qquad(l=1,\cdots,p)$$

它实际上就是常微分方程组

$$\frac{d\tilde{y}^l}{dx^{r+1}}=\tilde{\lambda}^l(x^{r+1},\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^p)\qquad(l=1,\cdots,p)$$

给出初始条件:

$$x^{r+1}=x_0^{r+1}\text{ 时},\tilde{y}^l=f^l(x_0^1,\cdots,x_0^r,x_0^{r+1},y_0^1,\cdots,y_0^p)\quad(l=1,\cdots,p)$$

方程组存在唯一解

$$\tilde{y}^l=f^l(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p)=\varphi^l(x^{r+1})\qquad(l=1,\cdots,p)$$

再从这组方程中解出 $y^1,\cdots,y^p$，我们就得到满足初始条件的积分曲面的方程

$$y^l=y^l(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1})\qquad(l=1,\cdots,p)$$

定理证毕.

推论 给出一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^i}=\varphi_i^l(x,y)\qquad(i=1,\cdots,n;\ \ l=1,\cdots,p)$$

如果它满足条件

$$\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial x^i}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial y^k}\varphi_i^k=\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial x^j}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k\quad(i,j=1,\cdots,n;l=1,\cdots,p)$$

则这方程组完全可积。

证明 这个一阶偏微分方程组等价于发甫方程组

$$\pi^l \equiv dy^l - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^l(x, y) dx^i = 0 \qquad (l=1, \cdots, p)$$

推论中的条件相当于发甫形式 $\pi^l(l=1, \cdots, p)$ 的弗罗皮尼斯条件，根据上述定理，发甫方程组 $\pi^l=0(l=1, \cdots, p)$完全可积。

实例：解发甫方程

$$\omega \equiv P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

假定它满足弗罗皮尼斯条件.

解 给出初始条件：

$$\text{当 } x=x_0,\ \ y=y_0 \text{ 时}, z=z_0$$

命 $\varpi = \omega|_{y=y_0}$, 考虑发甫方程

$$\varpi = P(x, y_0, z)dx + R(x, y_0, z)dz = 0$$

此时 $n=1$, 不用弗罗皮尼斯条件. 它等价于常微分方程

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P(x, y_0, z)}{R(x, y_0, z)}$$

(如果 $R(x, y_0, z) \equiv 0$, 则这方程变成 $dx=0$), 给出初始条件

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时}, z=z_0$$

则这方程存在唯一解

$$z - z_0 = \varphi(x, y_0) - \varphi(x_0, y_0)$$

或

$$\bar{f}(x, y_0, z) \equiv z - \varphi(x, y_0) = z_0 - \varphi(x_0, y_0)$$

因此存在函数 $\bar{\lambda}(x, y_0, z)$ (称为发甫方程 $\varpi=0$ 的积分因子), 使得

$$\varpi = \bar{\lambda}(x, y_0, z) d\bar{f}$$

现在把 y_0 改回成 y, 命

$$\lambda(x, y, z) = \bar{\lambda}(x, y_0, z)|_{y_0 \to y}$$

$$f(x, y, z) = \bar{f}(x, y_0, z)|_{y_0 \to y}$$

注意

$$\omega \equiv \varpi|_{y_0 \to y} + Q(x, y, z)dy$$

所以发甫方程 $\omega=0$ 等价于发甫方程

$$\pi \equiv \lambda(x, y, z)df + Q(x, y, z)dy = 0$$

注意

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\bigg|_{y_0 \to y} = \frac{\partial}{\partial z}(z - \varphi(x, y)) = 1$$

根据逆函数定理，局部上可以从

$$\tilde{z} = f(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$$

反解出

$$z = \psi(x, y, \tilde{z})$$

因此发甫方程 $\pi=0$ 变成

$$\tilde{\pi} \equiv d\tilde{z} - \tilde{\lambda}(x, y, \tilde{z})dy = 0$$

其中

$$\tilde{\lambda}(x, y, \tilde{z}) = -\lambda[x, y, \psi(x, y, \tilde{z})]$$

根据命题 6．由于发甫形式 ω 满足弗罗皮尼斯条件，所以与它等价的发甫方程 $\tilde{\pi}=0$ 也满足弗罗皮尼斯条件．因为

$$d\tilde{\pi} = dd\tilde{z} - d\tilde{\lambda} \wedge dy = -\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \tilde{z}}d\tilde{z} \wedge dy$$

$$= -\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{\pi} + \tilde{\lambda}dy) \wedge dy$$

$$= -\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \tilde{z}}dy \wedge \tilde{\pi}$$

因此发甫形式 $\tilde{\pi}$ 的弗罗皮尼斯条件是

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial x} = 0$$

即函数 $\tilde{\lambda}$ 与变量 x 无关，因此发甫方程 $\tilde{\pi}=0$ 可以改写成

$$\tilde{\pi} \equiv d\tilde{z} - \tilde{\lambda}(y, \tilde{z})dy = 0$$

它等价于常微分方程

$$\frac{d\tilde{z}}{dy}=\tilde{\lambda}(y,\tilde{z})$$

给出初始条件

$$\text{当 } y=y_0 \text{ 时}, \tilde{z}=z_0-\varphi(x_0,y_0)$$

这方程存在唯一解

$$\tilde{z}\equiv z-\varphi(x,y)=\theta(y)$$

或

$$z=\varphi(x,y)+\theta(y)$$

这就是过(x_0, y_0, z_0)点的积分曲面的方程。

习　　题

1　设V是n维实向量空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是它的一组基，命$\alpha=e_1\wedge\cdots\wedge e_p(0<p<n)$。设$V$中一向量$v$满足$v\wedge\alpha=0$。求证：$v$是$e_1, \cdots, e_p$的线性组合。

2　设V是n维实向量空间，$\{e_1, \cdots, e_n\}$是它的一组基，命$\alpha=e_1\wedge e_2+\cdots+e_{2r-1}\wedge e_{2r}$求证：$\alpha^r=\underbrace{\alpha\wedge\cdots\wedge\alpha}_{r\text{ 个}}\neq 0$, $\alpha^{r+1}=0$.

3　设$\omega=\frac{1}{2}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}dx^i\wedge dx^j$,　$a_{ij}+a_{ji}=0$

求证：　$d\omega=\frac{1}{6}\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right)dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k$

4　寻找一个$(n-1)$-形式φ，使得

$$d\varphi=dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$$

5　给出发甫形式$\omega=yzdx+zxdy+xydz$，求证它满足弗罗皮尼斯条件，并求发甫方程$\omega=0$的通解。

§2　活动标架

2.1　合同变换群

定义　R^3到自身的映射，如果它保持距离不变，则称为空间

合同变换.

实例：R^3 中的平移，旋转和对某一平面的反射都是合同变换.

根据这个定义，由于合同变换保持距离不变，它使三角形变成与它全等的三角形，因此也保持角度不变，于是也保持两向量的内积不变. 特别地，合同变换把两两正交的单位向量变成两两正交的单位向量.

下面我们来推导合同变换的公式.

设$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$是 R^3 的直角坐标系，O是原点，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是从 O 出发的两两正交的单位向量. 设

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

即 P 点的坐标是(x_1,x_2,x_3)，经过合同变换 T，P 点变成 P' 点，

$$\overrightarrow{OP'}=x_1'\boldsymbol{e}_1+x_2'\boldsymbol{e}_2+x_3'\boldsymbol{e}_3$$

现在我们要确定合同变换 T 的表达式，即 P 点的坐标(x_1,x_2,x_3)与对应的 P' 点的坐标(x_1',x_2',x_3')之间的表达式.

设合同变换 T 把直角坐标系 $[O;\ \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 变成直角坐标系 $[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$，设

$$\overrightarrow{OO'}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{e}_i'=a_{1i}\boldsymbol{e}_1+a_{2i}\boldsymbol{e}_2+a_{3i}\boldsymbol{e}_3\qquad(i=1,2,3)$$

由于合同变换保持距离和角度不变，所以

$$\overrightarrow{O'P'}=x_1\boldsymbol{e}_1'+x_2\boldsymbol{e}_2'+x_3\boldsymbol{e}_3'$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'&=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P'}\\&=\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i+\sum_{j=1}^{3}x_j\boldsymbol{e}_j'\\&=\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i+\sum_{i,j=1}^{3}x_ja_{ij}\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

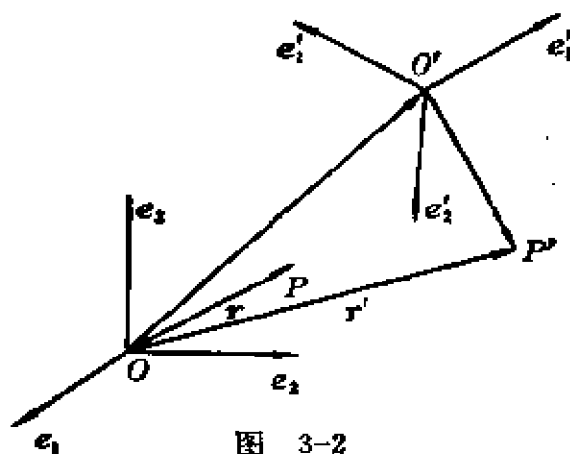


图 3-2

所以

$$\sum_{i=1}^{3} x_i' e_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + a_i\right) e_i$$

于是得到 R^3 中合同变换的公式

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + a_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

由于 e_1', e_2', e_3' 是两两正交的单位向量，所以 (a_{ij}) 是正交矩阵，即

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{3} a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \quad (j, k=1, 2, 3)$$

并且

$$\Delta = \det(a_{ij}) = \pm 1$$

从空间合同变换的表达式可以看出，任何一个空间合同变换是由下列三种合同变换组合而成.

绕过原点 O 的轴的旋转:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \quad (i=1, 2, 3) \quad \Delta = \det(a_{ij}) = +1$$

平移:

$$x_i' = x_i + a_i \quad (i=1, 2, 3)$$

对坐标平面的反射:

$$x_1'=x_1,\ \ x_2'=x_2,\ \ x_3'=-x_3$$

当$\Delta=+1$时，空间合同变换由平移和绕过原点O的轴的旋转组合而成，它保持右手坐标系不变；当$\Delta=-1$时，空间合同变换中包括奇数个反射，它使右手坐标系变成左手坐标系.

注意，每一个空间合同变换T实际上由它在直角坐标系$[O;e_1,e_2,e_3]$上的作用所确定，即如果

$$TO=O',\ \ O'\ \text{的坐标是}(a_1,a_2,a_3)$$

$$Te_i=e_i'=\sum_{j=1}^{3}a_{ji}e_j\quad(i=1,2,3)$$

则T的变换公式就完全确定了. 因此我们可以用直角坐标系$[O';e_1',e_2',e_3']$来表示一个合同变换T. 以后我们把$[O';e_1',e_2',e_3']$称为R^3中的标架.

命题 7 R^3中全体合同变换构成一个群，称为空间合同变换群.

证明 因为

(1) 两个空间合同变换的组合还是一个空间合同变换；

(2) 三个空间合同变换的组合满足结合律；

(3) 恒同变换I：$x_i'=x_i(i=1,2,3)$与任何空间合同变换T的组合$I\circ T=T\circ I=T$，因此I对于空间合同变换的组合来说是单位元素；

(4) 任何空间合同变换一定有逆变换，而且这个逆变换还是空间合同变换.

注意，空间合同变换群可以看成是R^3中全体标架的集合，因为R^3中每一个标架确定了一个空间合同变换.

2.2 活动标架

上一小节中我们已定义了R^3中一个标架是R^3中一点O'和从O'点出发的三个有序的两两正交的单位向量. R^3中的合同变

换群 G 的元素(即空间合同变换)与 R^3 中的标架是一一对应的,并且对合同变换的组合来讲仍保持对应的关系. 因此, 我们可以把 R^3 中的标架看成空间合同变换群的元素的具体表示.

从现在起我们把 R^3 中的标架记成 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 其中向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OO'}$, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 表示从 O' 出发的三个有序的两两正交的单位向量(注意,以后我们不再用上一小节中的符号 $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$).

设标架 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 是变动的,它光滑地依赖于 p 个参数,也就是说: 向量 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是 p 个参数 $u^1, \cdots, u^p$ 的 C^∞-函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, \cdots, u^p), \quad \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i(u^1, \cdots, u^p) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

则 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 称为 p 参数的**活动标架**. 由于 R^3 中的标架的自由度为 6 (原点的三个坐标,还有三个欧拉角),所以活动标架的参数不能多于 6. p 参数的活动标架的全体构成空间合同变换群 G 的 p 维子空间. 嘉当(E. Cartan)的活动标架法的主要思想是: 通过活动标架这个桥梁把微分几何中所研究的图形嵌入到空间合同变换群 G 中去,也就是把这图形看成 G 的子空间,然后 G 的性质自然地传递到它的子空间上,从而得到我们所要研究的图形的性质. 这是克莱因(F. Klein)的爱尔朗根(Erlangen)纲领的精神在微分几何中的体现.

实例: (1) 单参活动标架. 给出一条空间曲线 (C):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

曲线上每一点 $\boldsymbol{r}(s)$,对应一伏雷内标架 $\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)$,其中

$$\boldsymbol{e}_1(s) = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \boldsymbol{e}_2(s) = \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} \Big/ \left|\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}\right|, \quad \boldsymbol{e}_3(s) = \boldsymbol{e}_1(s) \times \boldsymbol{e}_2(s)$$

则 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)\}$ 构成单参活动标架. 因此, 一条空间曲线 (C) 可以看成空间合同变换群的 1 维子空间.

(2) 双参数活动标架. 给出一个曲面 (S):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

其上选取正交坐标网．则曲面(S)上任一点$\boldsymbol{r}(u,v)$处存在三个有序的两两正交的单位向量

$$\boldsymbol{e}_1(u,v)=\boldsymbol{r}_u/|\boldsymbol{r}_u|,\quad \boldsymbol{e}_2(u,v)=\boldsymbol{r}_v/|\boldsymbol{r}_v|,\quad \boldsymbol{e}_3(u,v)=\boldsymbol{n}(u,v)$$

其中$\boldsymbol{n}(u,v)$是曲面在$\boldsymbol{r}(u,v)$点的单位法向量．$\{\boldsymbol{r}(u,v);\ \boldsymbol{e}_1(u,v),\boldsymbol{e}_2(u,v),\boldsymbol{e}_3(u,v)\}$构成双参数活动标架．因此，一个曲面$(S)$可以看成空间合同变换群的2维子空间．

根据以上分析，要研究空间中图形的性质，首先要把空间合同变换群G的性质弄清楚．现在，我们已经把空间合同变换群理解成R^3中全体标架的集合，因此要研究空间合同变换群G，实际上是研究与它对应的6参数活动标架$\{\boldsymbol{r}(v^1,\cdots,v^6);\boldsymbol{e}_i(v^1,\cdots,v^6)\}$，至于$p$参数的活动标架$(p\leqslant 6)$则是$G$的$p$维子空间，即

$$v^i=v^i(u^1,\cdots,u^p)\qquad(i=1,\cdots,6)$$

所以p参数的活动标架可以表示成

$$\{\boldsymbol{r}[v^1(u^1,\cdots,u^p),\cdots,v^6(u^1\cdots,u^p)];\ \boldsymbol{e}_i[v^1(u^1,\cdots,u^p),\cdots,v^6(u^1,\cdots,u^p)]\}$$

简写成

$$\{\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^p);\ \boldsymbol{e}_i(u^1,\cdots,u^p)\}$$

对于R^3中p参数活动标架来说，最重要的有两个：一个是活动标架的无穷小位移，另一个是它的结构方程．

所谓活动标架$\{\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^p);\boldsymbol{e}_i(u^1,\cdots,u^p)\}$的无穷小位移是指它们的微分

$$\begin{cases} d\boldsymbol{r}=\sum\limits_{i=1}^{3}\omega^i(u,du)\boldsymbol{e}_i \\ d\boldsymbol{e}_i=\sum\limits_{j=1}^{3}\omega_i^j(u,du)\boldsymbol{e}_j \end{cases}\qquad(i=1,2,3)$$

其中$\omega^i(u,du)$和$\omega_i^j(u,du)$是系数为$(u^1,\cdots,u^p)$的C^∞-函数的

$du^1, \cdots, du^r$ 的发甫形式，它们称为动活标架$\{r; e_i\}$的**相对分量**. 活动标架的相对分量刻划了活动标架的无穷小位移.

发甫形式 $\omega_i^j(i, j=1, 2, 3)$ 不都是独立的. 由于 e_1, e_2, e_3 是两两正交的单位向量，所以

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \qquad (i, j=1, 2, 3)$$

微分上式得

$$de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = 0$$

所以

$$\sum_{k=1}^{3} \omega_i^k e_k \cdot e_j + \sum_{k=1}^{3} e_i \cdot \omega_j^k e_k = 0$$

即

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \qquad (i, j=1, 2, 3)$$

所以

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0$$

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1, \quad \omega_2^3 = -\omega_3^2, \quad \omega_3^1 = -\omega_1^3$$

因此相对分量 ω^i 和 ω_i^j 中，只须用到其中六个：$\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^2, \omega_2^3, \omega_3^1$.

实例： 考虑双参数活动标架

$$\{r(u, v); \ e_1(u, v), \ e_2(u, v), \ e_3(u, v)\}$$

其中

$$r = r(u, v)$$

是曲面(S)的方程，其上已选取正交坐标网.

$$e_1 = r_u/|r_u| = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = r_v/|r_v| = \frac{r_v}{\sqrt{G}}, \quad e_3 = n$$

其中E，G是曲面(S)的第一类基本量. 注意，由于坐标网正交，所以 $F=0$.

$$dr = r_u du + r_v dv = (\sqrt{E}\, du) e_1 + (\sqrt{G}\, dv) e_2$$

因而

$$\omega^1=\sqrt{E}du,\quad \omega^2=\sqrt{G}dv,\quad \omega^3=0$$

$$de_1=d(r_u/\sqrt{E})=\frac{r_{uu}du+r_{uv}dv}{\sqrt{E}}-\frac{(E_udu+E_vdv)r_u}{2E^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{E}}[(\Gamma^1_{11}r_u+\Gamma^2_{11}r_v+Ln)du+(\Gamma^1_{12}r_u+\Gamma^2_{12}r_v+$$

$$Mn)dv]-\frac{1}{2E}(E_udu+E_vdv)\cdot\frac{r_u}{\sqrt{E}}$$

$$=\left(\Gamma^1_{11}du+\Gamma^1_{12}dv-\frac{E_udu+E_vdv}{2E}\right)\frac{r_u}{\sqrt{E}}+(\Gamma^2_{11}du+$$

$$\Gamma^2_{12}dv)\frac{r_v}{\sqrt{E}}+\frac{1}{\sqrt{E}}(Ldu+Mdv)n$$

$$=\left(\Gamma^1_{11}du+\Gamma^1_{12}dv-\frac{E_udu+E_vdv}{2E}\right)e_1+\sqrt{\frac{G}{E}}(\Gamma^2_{11}du+$$

$$\Gamma^2_{12}dv)e_2+\frac{1}{\sqrt{E}}(Ldu+Mdv)e_3$$

同理

$$de_2=d(r_v/\sqrt{G})=\sqrt{\frac{E}{G}}(\Gamma^1_{12}du+\Gamma^1_{22}dv)e_1+(\Gamma^2_{12}du+\Gamma^2_{22}dv$$

$$-\frac{G_udu+G_vdv}{2G}\Big)e_2+\frac{1}{\sqrt{G}}(Mdu+Ndv)e_3$$

但是对于正交坐标网来说

$$\Gamma^1_{11}=\frac{E_u}{2E},\qquad \Gamma^2_{11}=-\frac{E_v}{2G},\qquad \Gamma^1_{12}=\frac{E_v}{2E}$$

$$\Gamma^2_{12}=\frac{G_u}{2G},\qquad \Gamma^1_{22}=-\frac{G_u}{2E},\qquad \Gamma^2_{22}=\frac{G_v}{2G}$$

$$\mu^1_1=-\frac{L}{E},\qquad \mu^2_1=-\frac{M}{G}$$

$$\mu^1_2=-\frac{M}{E},\qquad \mu^2_2=-\frac{N}{G}$$

所以

$$\omega_1^1=0, \quad \omega_2^2=0, \quad \omega_1^3=\frac{1}{\sqrt{E}}(Ldu+Mdv)$$

$$\omega_2^3=\frac{1}{\sqrt{G}}(Mdu+Ndv), \quad \omega_1^2=-\omega_2^1=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_vdu-G_udv)$$

$$\begin{aligned}de_3=dn=n_udu+n_vdv&=(\mu_1^1r_u+\mu_1^2r_v)du+(\mu_2^1r_u+\mu_2^2r_v)dv\\&=-\frac{1}{E}(Ldu+Mdv)r_u-\frac{1}{G}(Mdu+Ndv)r_v\\&=-\frac{1}{\sqrt{E}}(Ldu+Mdv)e_1-\frac{1}{\sqrt{G}}(Mdu+Ndv)e_2\end{aligned}$$

所以

$$\omega_3^1=-\frac{1}{\sqrt{E}}(Ldu+Mdv)=-\omega_1^3$$

$$\omega_3^2=-\frac{1}{\sqrt{G}}(Mdu+Ndv)=-\omega_2^3$$

根据命题 4 (Poincaré 引理), $dd=0$, 于是有

$$ddr=0, \quad dde_i=0 \qquad (i=1,2,3)$$

根据 $ddr=0$ 和 $dr=\sum_{i=1}^{3}\omega^ie_i$ 应用命题 5,

$$\begin{aligned}ddr=d(\sum_{i=1}^{3}\omega^ie_i)&=\sum_{i=1}^{3}d\omega^ie_i-\sum_{i=1}^{3}\omega^i\wedge de_i\\&=\sum_{i=1}^{3}(d\omega^i-\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i)e_i=0\end{aligned}$$

所以

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i \qquad (i=1,2,3)$$

根据 $dde_i=0 \quad (i=1,2,3,)$ 和 $de_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_i^je_j \quad (i=1,2,3)$, 还

用命题 5，

$$dde_i = d\left(\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{3} d\omega_i^j e_j - \sum_{j=1}^{3}\omega_i^j \wedge de_j$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(d\omega_i^j - \sum_{k=1}^{3}\omega_i^k \wedge \omega_k^j\right)e_j = 0$$

所以

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3}\omega_i^k \wedge \omega_k^j \qquad (i, j=1, 2, 3)$$

于是我们得到活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 的相对分量 ω^i 和 ω_i^j 应满足的条件

$$\begin{cases} d\omega^i = \sum_{j=1}^{3}\omega^j \wedge \omega_j^i \qquad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \\ d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3}\omega_i^k \wedge \omega_k^j \qquad (i, j=1, 2, 3) \end{cases}$$

上式称为活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 的结构方程.

实例：现在我们来讨论双参数活动标架的结构方程. 前面三个结构方程

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{3}\omega^j \wedge \omega_j^i \qquad (i=1, 2, 3)$$

可以用来计算 $\omega_1^2, \omega_2^3, \omega_3^1$. 例如，$\omega^3=0$ 所以

$$d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0$$

根据嘉当引理，存在函数 $a(u, v)$, $b(u, v)$ 和 $c(u, v)$ 使得

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2$$

$$\omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2$$

以后我们将说明系数 a, b, c 的几何意义.

再设

$$\omega_1^2 = g_1(u, v)du + g_2(u, v)dv$$

因为$\omega^1 = \sqrt{E}\,du$, $\omega^2 = \sqrt{G}\,dv$, 所以

$$\omega_1^2 = \frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1 + \frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2$$

$$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1 = \omega^2 \wedge -\left(\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1 + \frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2\right) = \frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1 \wedge \omega^2$$

$$d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 = \omega^1 \wedge \left(\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1 + \frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2\right) = \frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^1 \wedge \omega^2$$

所以

$$\frac{g_1}{\sqrt{E}} = \frac{d\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}, \qquad \frac{g_2}{\sqrt{G}} = \frac{d\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}$$

因此*)

$$\omega_1^2 = \left(\frac{d\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^1 + \left(\frac{d\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^2$$

再讨论后六个(只有三个独立)结构方程

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

我们已经知道, 它们等价于

$$d(de_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

因为

$$de_i = \frac{\partial e_i}{\partial u}du + \frac{\partial e_i}{\partial v}dv \qquad (i = 1, 2, 3)$$

所以 $dde_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ 等价于

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 e_i}{\partial u \partial v} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

当 $i = 3$ 时 $e_3 = n$, 上式变成

---

*) $d\omega^1$ 和 $d\omega^2$ 是 2 次形式, 因此可以表示成 $d\omega^1 = f(u^1, u^2)\omega^1 \wedge \omega^2$, $d\omega^2 = g(u^1, u^2)\omega^1 \wedge \omega^2$, 所以 $\frac{d\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2} = f(u^1, u^2)$, $\frac{d\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = g(u^1, u^2)$。

$$\frac{\partial n_u}{\partial v}=\frac{\partial n_v}{\partial u}$$

这就是科达齐-迈因纳尔迪公式．上式等价于 $dde_3=0$，可是后者又等价于结构方程

$$d\omega_3^1=\omega_3^2\wedge\omega_2^1$$

$$d\omega_3^2=\omega_3^1\wedge\omega_1^2$$

因此这两个结构方程就是曲面论中的科达齐-迈因纳尔迪公式．

至于另外一个结构方程

$$d\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2$$

以后我们将指出，它扮演了高斯公式的角色，也就是说，用它可以证明：曲面的高斯曲率只与第一基本形式有关．

下面我们将证明活动标架的基本定理：

定理 3 给出六个 p 参数 $u^1,\cdots,u^p\ (p\leqslant 6)$ 的发甫形式

$$\omega^1(u,du),\ \omega^2(u,du),\ \omega^3(u,du)$$

$$\omega_1^2(u,du),\ \omega_2^3(u,du),\ \omega_3^1(u,du)$$

如果它们满足结构方程

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i\qquad(i=1,2,3)$$

$$d\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j\qquad(i,j=1,2,3)$$

其中

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0\qquad(i,j=1,2,3)$$

则存在 p 参数活动标架

$$\{r(u^1,\cdots,u^p);\quad e_i(u^1,\cdots,u^p)\quad(i=1,2,3)\}$$

它们的相对分量就是给定的发甫形式 ω^i 和 ω_i^j，并且满足同一结构方程的不同的 p 参数活动标架之间只差一空间位置．

证明 用给定的发甫方程构造以 r 和 $e_i\ (i=1,2,3)$ 为未知

函数的发甫方程组

$$\begin{cases}\pi = dr - \omega^1(u, du)e_1 - \omega^2(u, du)e_2 - \omega^3(u, du)e_3 = 0 \\ \pi_i = de_i - \omega_i^1(u, du)e_1 - \omega_i^2(u, du)e_2 - \omega_i^3(u, du)e_3 = 0\end{cases} \quad (i=1,2,3)$$

要判断这个发甫方程组是否完全可积，必须计算相应的发甫形式是否满足弗罗皮尼斯条件，把方程组的左边外微分一次：

$$\begin{aligned} d\pi &= ddr - \sum_{i=1}^{3} d\omega^i e_i + \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge de_i \\ &= -\sum_{i=1}^{3} d\omega^i e_i + \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \left(\pi_i + \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(-d\omega^i + \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j^i\right) e_i + \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \pi_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\pi_i &= dde_i - \sum_{j=1}^{3} d\omega_i^j e_j + \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \wedge de_j \\ &= -\sum_{j=1}^{3} d\omega_i^j e_j + \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \wedge \left(\pi_j + \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k e_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(-d\omega_i^j + \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j\right) e_j + \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \wedge \pi_j \end{aligned}$$

所以发甫形式 π 和 π_i $(i=1, 2, 3)$ 的弗罗皮尼斯条件正好是定理中给出的条件

$$\begin{cases} d\omega^i = \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j^i & (i=1, 2, 3) \\ d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j & (i, j=1, 2, 3) \end{cases}$$

因此发甫形式 π 和 π_i $(i=1, 2, 3)$ 满足弗罗皮尼斯条件，所以发甫方程组 $\pi=0$，$\pi_i=0$ $(i=1, 2, 3)$ 完全可积。给出初始条件：

$u^i = u_0^i \quad (i=1,2,3)$时，$r = r_0, e_i = (e_i)_0 \quad (i=1,2,3)$

存在唯一组 p 参数活动标架

$$r = r(u^1, \cdots, u^p), \quad e_i = e_i(u^1, \cdots, u^p) \qquad (i=1,2,3)$$

其中条件 $\omega_i^j + \omega_j^i = 0 (i, j=1,2,3)$ 保证 e_1, e_2, e_3 是两两正交的单位向量. 注意，不同的初始条件意味着不同的初始标架，它们之间差一空间合同变换，因此不同的初始条件所确定的不同的解之间只差一空间合同. 定理证毕.

2.3 活动标架法

活动标架法是微分几何中研究空间图形的方法，它的特点是把图形的研究安排好一定的程序，然后有步骤地去分析图形的性质.

在上一小节中我们已经提到，E. Cartan 活动标架法的中心思想是：设法把所要研究的空间图形嵌入到空间合同变换群 G 中去，要达到这个目的，办法是设法找到一族活动标架，使这个图形与这族活动标架一一对应起来，如果做到了这一点，剩下的问题就是计算这族活动标架的相对分量，以及相对分量应满足的结构方程.

根据以上分析，所谓活动标架法，大体上可以分成以下三个步骤：

第一步：对于一个 p 参数的空间几何图形，我们设法找一组 p 参数的活动标架

$$\{r(u^1, \cdots, u^p); e_1(u^1, \cdots, u^p), e_2(u^1, \cdots, u^p), e_3(u^1, \cdots, u^p)\}$$

使得它与所研究的图形的元素一一对应起来.

第二步：把活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 微分一次，

$$dr = \sum_{i=1}^{3} \omega^i e_i$$

$$de_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j e_j \qquad (i=1,2,3)$$

从而得到活动标架的相对分量

$$\omega^i(u,du) \quad (i=1,2,3); \quad \omega_i^j(u,du) \qquad (i,j=1,2,3)$$

其中

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0 \qquad (i,j=1,2,3)$$

第三步：把所得到的相对分量 $\omega^i(i=1,2,3)$ 和 $\omega_i^j(i,j=1,2,3)$再外微分一次，从而得到它们应满足的结构方程

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i \qquad (i=1,2,3)$$

$$d\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j \qquad (i,j=1,2,3)$$

下面我们以空间曲线为例来说明一下这种活动标架法。

给出一条空间曲线(C)

$$r=r(s)$$

其中 s 是曲线(C)的有向弧长.

首先，我们设法把(C)上的点与单参活动标架

$$\{r(s);e_1(s),e_2(s),e_3(s)\}$$

一一对应起来. 这一点在上一小节的例子中我们已经做到了，因为$r(s)$就是曲线的方程. 然后再命

$$e_1=\frac{dr}{ds}, \qquad e_2=\frac{de_1}{ds}\Big/\left|\frac{de_1}{ds}\right|, \qquad e_3=e_1\times e_2$$

换言之，e_1 是曲线(C)的单位切向量，e_2 是单位主法向量，e_3 是单位副法向量.

第二步，计算上述单参活动标架的相对分量.

$$dr=\frac{dr}{ds}\cdot ds=ds\cdot e_1$$

所以

$$\omega^1 = ds, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0$$

根据 e_2 的选择，$e_2 /\!/ de_1$，所以

$$de_1 = \omega_1^2 e_2, \quad \omega_1^1 = 0, \quad \omega_1^3 = 0$$

定义 $\omega_1^2 = k(s)ds$，于是得到公式

$$\frac{de_1}{ds} = k(s)e_2$$

$$de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3, \quad \omega_2^2 = 0$$

其中 $\omega_2^1 = -\omega_1^2 = -k(s)ds$.

定义 $\omega_2^3 = \tau(s)ds$，则得到公式

$$\frac{de_2}{ds} = -k(s)e_1 + \tau(s)e_3$$

最后

$$de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2, \quad \omega_3^3 = 0$$

其中 $\omega_3^1 = -\omega_1^3 = 0$, $\quad \omega_3^2 = -\omega_2^3 = -\tau(s)ds$，于是得到公式

$$\frac{de_3}{ds} = -\tau(s)e_2$$

根据以上计算，单参数活动标架的无穷小位移公式实际上就是空间曲线的伏雷内公式

$$\begin{cases} \dfrac{de_1}{ds} = k(s)e_2 \\ \dfrac{de_2}{ds} = -k(s)e_1 + \tau(s)e_3 \\ \dfrac{de_3}{ds} = -\tau(s)e_2 \end{cases}$$

第三步，计算相对分量应满足的结构方程. 由于 ω_i 和 ω_i^j 都是单参数发甫形式，它们的外微分为零，因此对于单参数活动标架来说，不存在结构方程. 换言之，对于空间曲线来说，有了伏雷内公式就够了，伏雷内公式不需要可积条件就能确定曲线的方程.

§3 用活动标架法研究曲面

3.1 曲面论的基本定理

现在我们用活动标架法来研究 R^3 中的曲面. 设曲面(S)的方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

第一步,寻找一个双参数活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(u,v);\quad \boldsymbol{e}_1(u,v),\quad \boldsymbol{e}_2(u,v),\quad \boldsymbol{e}_3(u,v)\}$$

使得曲面(S)上的点与双参数活动标架一一对应起来. 为此,我们在曲面(S)上选择正交坐标网,然后取 $\boldsymbol{r}(u,v)$就是曲面的向径,并且选 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 分别是坐标曲线的单位切向量,再取 $\boldsymbol{e}_3$ 为曲面的单位法向量 $\boldsymbol{n}$,即

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{r}_1/|\boldsymbol{r}_1|=\frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_1$$

$$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{r}_2/|\boldsymbol{r}_2|=\frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_2$$

$$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{EG}}\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{n}$$

第二步,计算上述双参数活动标架的相对分量. 为此,我们对活动标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$进行微分

$$\begin{cases}d\boldsymbol{r}=\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2, \qquad \omega^3=0\\ d\boldsymbol{e}_1=\omega_1^2\boldsymbol{e}_2+\omega_1^3\boldsymbol{e}_3\\ d\boldsymbol{e}_2=\omega_2^1\boldsymbol{e}_1+\omega_2^3\boldsymbol{e}_3\\ d\boldsymbol{e}_3=\omega_3^1\boldsymbol{e}_1+\omega_3^2\boldsymbol{e}_2\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 $\omega_i^j+\omega_j^i=0 \quad (i,j=1,2,3)$. 事实上,上面的第二、第三式是曲面$(S)$对于正交坐标网的高斯方程,第四式是魏因加尔吞方程.

第三步,计算相对分量应满足的结构方程. 为此对(3.1)再微分一次,得到

$$d\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1,\ d\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2,\ d\omega^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0 \tag{3.2}$$

$$d\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2,\quad d\omega_2^3=\omega_2^1\wedge\omega_1^3,\quad d\omega_3^1=\omega_3^2\wedge\omega_2^1$$

其中第四个式子是曲面(S)对于正交坐标网的高斯公式，最后两式子是科达齐-迈因纳尔迪公式.

从活动标架的基本定理，我们得到用活动标架的语言来表达的曲面论的基本定理。

定理 4（曲面论的基本定理） 给出六个双参数发甫形式

$$\omega^1(u,v;du,dv),\quad \omega^2(u,v;du,dv),\quad \omega^3(u,v;du,dv)$$

$$\omega_1^2(u,v;du,dv),\quad \omega_2^3(u,v;du,dv),\quad \omega_3^1(u,v;du,dv)$$

如果它们满足结构方程(3.2)，并且 $\omega_i^j+\omega_j^i=0(i,j=1,2,3)$，则差一空间合同确定一个双参数活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(u,v);\quad \boldsymbol{e}_1(u,v),\quad \boldsymbol{e}_2(u,v),\quad \boldsymbol{e}_3(u,v)\}$$

它的相对分量就是给出的发甫形式. 活动标架的原点 $\boldsymbol{r}(u,v)$的轨迹是一曲面，$\boldsymbol{e}_1(u,v)$和 $\boldsymbol{e}_2(u,v)$正好是曲面的坐标网的单位切向量，$\boldsymbol{e}_3(u,v)$是曲面的单位法向量.

3.2 曲面的第一和第二基本形式

曲面(S):

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=(\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2)=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$$

前面我们已经指出

$$\omega^1=\sqrt{E}\,du,\qquad \omega^2=\sqrt{G}\,dv$$

曲面(S)的只与 ω^1 和 ω^2 有关的量为曲面的内蕴量. 例如曲面的面积元素

$$dA=\sqrt{EG}\,du\wedge dv=\omega^1\wedge\omega^2$$

此外还有

$$\omega_1^2=\left(\frac{d\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^1+\left(\frac{d\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^2$$

曲面(S)的第二基本形式是

$$\begin{aligned}\mathrm{II}=-d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{e}_3&=-(\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\omega_3^1\boldsymbol{e}_1+\omega_3^2\boldsymbol{e}_2)\\&=-\omega^1\cdot\omega_3^1-\omega^2\cdot\omega_3^2\\&=\omega^1\cdot\omega_1^3+\omega^2\cdot\omega_2^3\end{aligned}$$

注意：$\omega^1\cdot\omega_1^3,\omega^2\cdot\omega_2^3$ 还有前面的$(\omega^1)^2$和$(\omega^2)^2$都是表示普通乘法，不是外乘.

因为

$$d\omega^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0$$

根据嘉当引理

$$\omega_1^3=a\omega^1+b\omega^2,\quad \omega_2^3=b\omega^1+c\omega^2$$

所以

$$\mathrm{II}=a(\omega^1)^2+2b\omega^1\cdot\omega^2+c(\omega^2)^2$$

即

$$\mathrm{II}=a\cdot Edu^2+2b\cdot\sqrt{EG}\,dudv+cG(dv)^2$$

这说明

$$a=L/E\quad b=M/\sqrt{EG}\quad c=N/G$$

3.3 曲面上的曲线 法曲率 测地曲率和测地挠率

我们先规定指标

$$i,j,k=1,2,3;\qquad \alpha,\beta,\gamma=1,2$$

考虑曲面(S)，仍取正交坐标网(u^1,u^2)，(S)上的曲线(C)：

$$u^\alpha=u^\alpha(s)$$

s是(C)的弧长参数. 设(C)的切方向$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{e}_1$的夹角为θ，在切平面上作一向量$\boldsymbol{\varepsilon}$，使得$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{e}_3)$构成一右手系，则有

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=-\boldsymbol{e}_1\sin\theta+\boldsymbol{e}_2\cos\theta$$

命$\boldsymbol{\beta}$和$\boldsymbol{\gamma}$分别为曲线(C)的主法向量和付法向量，φ为$\boldsymbol{\beta}$和$\boldsymbol{e}_3$的

夹角，则有

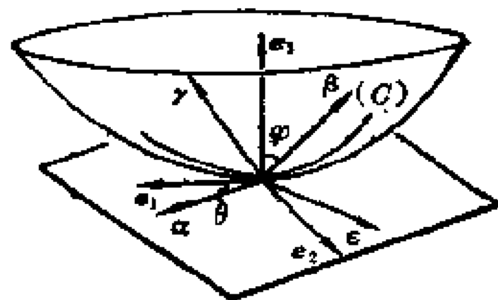


图 3-3

$$\beta=\varepsilon\sin\varphi+e_3\cos\varphi$$

$$\gamma=-\varepsilon\cos\varphi+e_3\sin\varphi$$

再根据曲线(C)的伏雷内公式

$$\begin{cases}\dfrac{d\alpha}{ds}=k\beta\\[2mm]\dfrac{d\beta}{ds}=-k\alpha+\tau\gamma\\[2mm]\dfrac{d\gamma}{ds}=-\tau\beta\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}d\alpha&=kds\beta\\&=(d\theta+\omega_1^2)\varepsilon+(\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta)e_3\end{aligned}$$

曲线(C)的测地曲率是

$$k_g=k\beta\cdot\varepsilon=\frac{d\theta+\omega_1^2}{ds}$$

因为 ω_1^2 和 ds 只与曲面的第一基本形式有关，所以 k_g 是属于曲面的内蕴性质的。

再考虑曲面的沿(C)的切方向上的法曲率

$$k_n=k\cos\varphi=k\beta\cdot e_3=(\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta)/ds$$

$$\alpha=\frac{d\gamma}{ds}=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2$$

$$d\gamma=\cos\theta ds e_1+\sin\theta ds e_2$$

$$\omega^1=\cos\theta ds,\qquad \omega^2=\sin\theta ds$$

所以

$$k_n=(\omega_1^3\cdot\omega^1/ds+\omega_2^3\cdot\omega^2/ds)/ds=\frac{\omega^1\cdot\omega_1^3+\omega^2\cdot\omega_2^3}{ds^2}$$

则得到

$$k_n=\frac{\text{II}}{\text{I}}$$

最后我们说明一下测地挠率的概念．定义曲线(C)的测地挠率τ_g为

$$\tau_g=-\frac{d\boldsymbol{e}_3}{ds}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$$

所以

$$\tau_g ds=-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot d\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot d(\boldsymbol{\beta}\cos\varphi+\boldsymbol{\gamma}\sin\varphi)$$

再根据曲线(C)的伏雷内公式

$$\begin{aligned}\tau_g&=-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{d}{ds}(\boldsymbol{\beta}\cos\varphi+\boldsymbol{\gamma}\sin\varphi)\\&=-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\cos\varphi-\boldsymbol{\beta}\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}+\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}\sin\varphi+\boldsymbol{\gamma}\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right)\\&=-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\Big(-k\cos\varphi\boldsymbol{\alpha}+\tau\cos\varphi\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\\&\quad-\tau\sin\varphi\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}\Big)\\&=\tau\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\frac{d\varphi}{ds}+\tau\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{ds}\\&=\tau+\frac{d\varphi}{ds}\end{aligned}$$

因而

$$\tau_g=\frac{d\varphi}{ds}+\tau$$

对于$\varphi=$常数的情形(例如，当(C)是渐近曲线时$\text{II}=0,\varphi=\frac{\pi}{2}$)，则$\tau_g=\tau$.

因为

$$d\boldsymbol{e}_3=\omega_3^1\boldsymbol{e}_1+\omega_3^2\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}=-\boldsymbol{e}_1\sin\theta+\boldsymbol{e}_2\cos\theta$$

$$\tau_g ds^2 = -(\varepsilon\cdot de_3)ds$$
$$= (e_1\sin\theta - e_2\cos\theta)\cdot(\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2)ds$$
$$= (\omega^2 e_1 - \omega^1 e_2)(\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2) = \omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2$$

嘉当把

$$\mathrm{III} = \omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2$$

称为曲面的第三基本形式.

$\mathrm{III}=0 \Rightarrow \tau_g = 0 \Rightarrow \varepsilon \perp de_3 \Rightarrow de_3 \,/\!/\, \alpha \Rightarrow$ 曲线(C)是曲率线. 于是得到曲面上曲率线网的方程为

$$\mathrm{III} = \omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2 = 0$$

3.4 曲面的主曲率 欧拉公式 高斯曲率和平均曲率

在上一小节中我们已经证明

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}$$

曲面的主曲率是 k_n 的极值,容易证明它们应满足条件

$$\frac{a\omega^1 + b\omega^2}{\omega^1} = \frac{b\omega^1 + c\omega^2}{\omega^2} = k$$

所以

$$(a-k)(c-k) - b^2 = 0$$

于是得到曲面的平均曲率和高斯曲率的公式:

$$H = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) = \frac{a+c}{2}$$

$$K = k_1 k_2 = ac - b^2$$

注意,

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = (a\omega^1 + b\omega^2)\wedge(-b\omega^1 - c\omega^2)$$
$$= (b^2 - ac)\omega^1\wedge\omega^2$$

所以

$$K = ac - b^2 = \frac{-d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$$

因此高斯曲率属于曲面的内蕴性质。

现在考虑以下情形：

(i) e_1 和 e_2 是主方向，这时

$$b=M/\sqrt{EG}=0,\qquad a=k_1,\qquad c=k_2$$

$$\omega_1^3=k_1\omega^1,\qquad \omega_2^3=k_2\omega^2$$

所以曲面的第二和第三基本形式变成

$$\mathrm{II}=k_1(\omega^1)^2+k_2(\omega^2)^2$$

$$\mathrm{III}=(k_2-k_1)\omega^1\omega^2$$

命 θ 是曲面上曲线(C)的切方向与某一主方向的夹角，前面已证明

$$\omega^1=\cos\theta ds,\qquad \omega^2=\sin\theta ds$$

所以

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$$

这就是欧拉公式. 此外还有

$$k_g ds=d\theta+\omega_1^2$$

$$\tau_g=(k_2-k_1)\sin\theta\cos\theta$$

(ii) 曲线(C)的切方向正好是 e_1，这时 $\theta=0$.

$$\omega^1=ds,\qquad \omega^2=0$$

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=a$$

$$k_g ds=\omega_1^2$$

$$\tau_g=\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}=b$$

(iii) 设曲线(C)是渐近曲线，则满足条件 $\mathrm{II}=0$，这时 $\tau_g=\tau$，取(C)的切方向为 e_1，则有 $a=0$.

$$K=k_1k_2=ac-b^2=-b^2=-\tau_g{}^2=-\tau^2$$

所以

$$\tau = \pm\sqrt{-K}$$

这就是恩内佩尔(Enneper)定理.

3.5 曲面上的平行移动

定义 设 $\boldsymbol{v}(u^1, u^2)$ 是曲面 (S) 上的向量场，命 $D\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{v}$ 在 (S) 的切平面上的投影，则 $D\boldsymbol{v}$ 称为 $\boldsymbol{v}$ 的绝对微分.

设 $\boldsymbol{v}=\sum_{\beta} v^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta}$

现在我们来计算 $D\boldsymbol{v}$. 因为

$$d\boldsymbol{e}_{\alpha}=\sum_{j=1}^{3}\omega_{\alpha}^{j}\boldsymbol{e}_{j} \qquad (\alpha=1,2)$$

所以

$$D\boldsymbol{e}_{\alpha}=\sum_{\beta=1}^{2}\omega_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta}$$

$$d\boldsymbol{v}=\sum_{\beta}(dv^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta}+v^{\beta}d\boldsymbol{e}_{\beta})$$

$$=\sum_{\beta}dv^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta}+\sum_{\alpha}v^{\alpha}d\boldsymbol{e}_{\alpha}$$

因而

$$D\boldsymbol{v}=\sum_{\beta}\left(dv^{\beta}+\sum_{\alpha}v^{\alpha}\omega_{\alpha}^{\beta}\right)$$

命

$$D\boldsymbol{v}=\sum_{\beta}Dv^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta}$$

则有

$$Dv^{\beta}=dv^{\beta}+\sum_{\alpha}v^{\alpha}\omega_{\alpha}^{\beta}$$

给出曲面 (S) 上一条曲线 (C):

$$u^\alpha = u^\alpha(s) \quad (\alpha = 1, 2)$$

其中 s 是弧长参数.

定义 曲面上沿曲线(C)的向量场 $v[u^\alpha(s)]$，如果

$$\frac{Dv}{ds} = 0, \text{或} \frac{dv^\beta}{ds} + \sum_\alpha v^\alpha \frac{\omega_\alpha^\beta}{ds} = 0 \qquad (\beta = 1, 2)$$

即

$$\frac{dv^1}{ds} + v^2 \frac{\omega_2^1}{ds} = 0, \qquad \frac{dv^2}{ds} + v^1 \frac{\omega_1^2}{ds} = 0$$

就称 $v(u^\alpha(s))$沿曲线(C)是平行的. 若设

$$\omega_\alpha^\beta = \sum_\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta du^\gamma$$

则得到平行向量场 $v = \sum_\beta v^\beta e_\beta$ 应满足的微分方程组

$$\frac{dv^\beta}{ds} + \sum_{\alpha, \gamma} v^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \frac{du^\gamma}{ds} = 0 \qquad (\beta = 1, 2)$$

如果在(C)的一点 $u^\alpha = u^\alpha(s_0)$处给出曲面的一个切向量 $v_0 = \sum_\beta v_0^\beta e_\beta$，则上述方程组对于初始条件 $s = s_0$ 时 $v^\beta = v_0^\beta$，存在唯一解

$$v^\beta = v^\beta(s)$$

沿曲线(C)的向量场 $v = \sum_\beta v^\beta e_\beta$ 平行于给定的向量v_0. 这就称为向量 v_0 沿曲线(C)的平行移动.

命题 1 沿曲面上一条曲线平行移动时，保持向量的内积不变.

证明 给出两个沿曲线(C)平行的向量场，在曲面上取正交坐标网 (u^1, u^2)，则

$$u = u^1 e_1 + u^2 e_2, \qquad v = v^1 e_1 + v^2 e_2$$

$$\frac{du^1}{ds}+u^2\frac{\omega_2^1}{ds}=0 \qquad \frac{dv^1}{ds}+v^2\frac{\omega_2^1}{ds}=0$$

$$\frac{du^2}{ds}+u^1\frac{\omega_1^2}{ds}=0 \qquad \frac{dv^2}{ds}+v^1\frac{\omega_1^2}{ds}=0$$

所以

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{d}{ds}(u^1v^1+u^2v^2)=\frac{du^1}{ds}\cdot v^1+u^1\cdot\frac{dv^1}{ds}+\frac{du^2}{ds}\cdot v^2+u^2\cdot\frac{dv^2}{ds}$$

$$=(u^2v^1+u^1v^2-u^1v^2-u^2v^1)\frac{\omega_1^2}{ds}=0$$

推论 沿曲面上一曲线平行移动时，保持向量的长度不变，也保持两方向的夹角不变.

由于沿曲线的平行移动保持长度不变，可以只考虑单位向量场

$$v^\theta=(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角. 这时平行条件就简化成

$$d\theta+\omega_1^2=0$$

特别地，如果平行移动与路径(曲线(C))无关，则上面的双参数的发甫方程是完全可积的，即弗罗皮尼斯条件成立. 这时 $d\omega_1^2=0$，所以

$$K=\frac{-d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=0$$

于是得到

命题 2 如果曲面的平行移动与路径无关，则这曲面一定是可展曲面.

我们已经知道，曲面上测地曲率为零的曲线称为测地线. 设 $\tilde{\theta}$ 为此曲线的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角，因为 $k_g ds=d\tilde{\theta}+\omega_1^2$，则测地线的方程是

$$d\tilde{\theta}+\omega_1^2=0$$

于是得到

命题 3 测地线是它的切线沿它自身平行的曲线，即测地线是自平行曲线．

再设向量场 v 沿测地线平行，则

$$d\theta+\omega_1^2=0 \qquad d\tilde{\theta}+\omega_1^2=0$$

其中 θ 是v与 e_1 的夹角，$\tilde{\theta}$ 是测地线与 e_1 的夹角，所以

$$d(\theta-\tilde{\theta})=0 \qquad \text{或} \qquad \theta-\tilde{\theta}=\text{常数}$$

因为 $\theta-\tilde{\theta}$ 是 v 和测地线的切方向的夹角，因此得到

命题 4 当向量 v 沿测地线平移时，它与测地线的夹角保持不变．

这命题给出一向量沿测地线平行移动的作法．

3.6 高斯-波涅公式

我们已经知道测地曲率公式是

$$k_g ds=d\theta+\omega_1^2$$

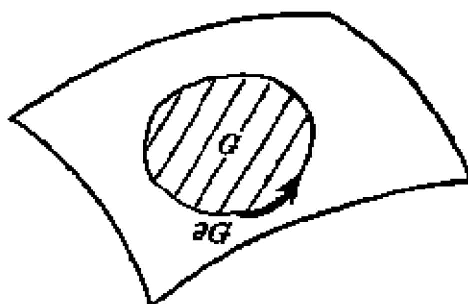


图 3-4

命 G 是曲面上一个单连通区域，假定它的边缘 ∂G 是一条光滑的闭曲线，再规定 ∂G 的正方向如下：使得我们按正方向沿曲线运动时，区域 G 总是在左边．把上式沿 ∂G 积分得到

$$\int_{\partial G} k_g ds=\int_{\partial G} d\theta+\int_{\partial G} \omega_1^2 \tag{3.3}$$

可以看出

$$\int_{\partial G} d\theta=2\pi$$

并且根据斯托克斯公式

$$\int_{\partial G} \omega_1^2=\int_G d\,\omega_1^2=-\int_G K\omega^1\wedge\omega^2$$

代入(3.3)式得到

$$\int_G K\omega^1\wedge\omega^2+\int_{\partial G}k_g ds=2\pi$$

这就是曲面论中著名的高斯-波涅公式。

如果区域 G 的边缘 ∂G 是测地线，则 $k_g=0$，于是有

$$\int_G KdA=2\pi$$

对于一个闭曲面 M 来说，用一条光滑的闭曲线 (C) 把它分成两个部分 G_1 和 G_2，根据高斯-波涅公式有

$$\int_{G_1} KdA+\int_{\partial G_1}k_g ds=2\pi$$

$$\int_{G_2} KdA+\int_{\partial G_2}k_g ds=2\pi$$

由于 ∂G_1 和 ∂G_2 的定向相反，把上两式相加后得到

$$\int_M KdA=4\pi$$

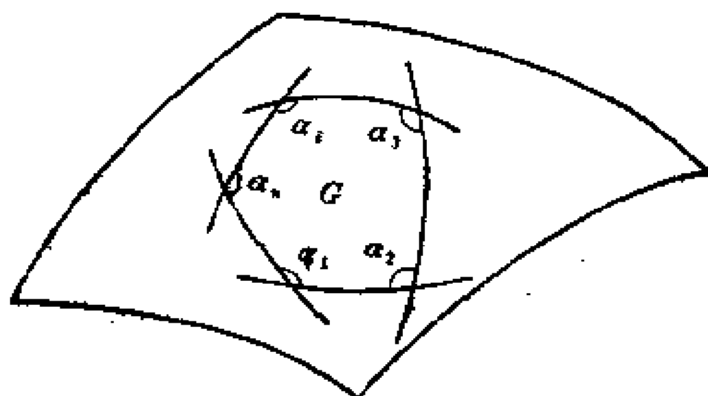


图 3-5

如果 ∂G 是分段光滑的，设它在非光滑点处的内角分别为 α_1，α_2，…，α_n，则

$$\int_{\partial G} d\theta=2\pi-\sum_i(\pi-\alpha_i)$$

因此，高斯-波涅公式应改成

$$\int_G KdA+\int k_g ds+\sum_i(\pi-\alpha_i)=2\pi$$

设 G 是曲面 M 上由测地线构成的 n 边形(称为测地多边形),因为 $k_g=0$,则有

$$\int_G KdA=2\pi-\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i)$$

特别地,如果 G 是曲面 M 上的测地三角形,则有

$$\int_G KdA=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-\pi$$

实例:(1)在半径为 r 的球面上,$K=\frac{1}{r^2}>0$,所以

$$\int_G KdA=\frac{1}{r^2}\int_G dA=\frac{1}{r^2}\times(\text{球面三角形的面积})$$

于是从高斯-波涅公式得到球面三角形的面积是

$$A=r^2\int_G KdA=r^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi)$$

这说明球面三角形的内角和大于 π.

(2)在伪球面或罗氏平面上,$K=$ 常数 <0,所以

$$\int_G KdA=K\int_G dA=K\times(\text{测地三角形的面积})$$

因而测地三角形的面积公式是

$$A=\frac{1}{K}\int_G KdA=\frac{1}{-K}(\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)$$

这说明伪球面或罗氏平面上测地三角形的内角和小于 π.

3.7 闭曲面的欧拉示性数

在前面我们已经证明了(无窟窿的)闭曲面 M 的高斯-波涅公式

$$\int_M KdA=4\pi$$

现在我们要把它推广到任意闭曲面上来.

设 M 是 R^3 中的闭曲面,用测地线把它剖分成测地多边形所

包围的区域 $M_1, M_2\cdots, M_F$，这时，可以把M看成一个弯曲多面体，设此多面体的顶点数为V，棱数为E，面数为F。则M的欧拉示性数定义为

$$\chi(M)=V-E+F$$

定理 4　设M是 R^3 中的闭曲面，则

$$\int_M KdA=2\pi\chi(M)$$

证明　设$M_i(i=1,2,\cdots,F)$是用测地线把M所剖分成的域，则

$$\int_M KdA=\sum_{i=1}^{F}\int_{M_i}KdA$$

根据高斯-波涅公式

$$\int_{M_i}KdA+\int_{\partial M_i}k_g ds=\int_{\partial M_i}d\theta$$

其中 ∂M_i 是测地线弧构成的多边形，所以

$$\int_{\partial M_i}k_g ds=0$$

设 ∂M_i 的内角是 α_{ij}，则

$$\int_{\partial M_i}d\theta=2\pi-\sum_j(\pi-\alpha_{ij})$$

所以

$$\int_M KdA=\sum_{i=1}^{F}\left[2\pi-\sum_j\left(\pi-\alpha_{ij}\right)\right]=2\pi F-\sum_{i=1}^{F}\sum_j\pi+\sum_{i=1}^{F}\sum_j\alpha_{ij}$$

注意

$$\sum_j\pi=(M_i\text{ 的顶点数})\cdot\pi=(M_i\text{ 的棱数})\cdot\pi$$

所以

$$\sum_{i=1}^{F}\sum_{j}\pi=2\pi E$$

此外

$$\sum_{i=1}^{F}\sum_{j}\alpha_{ij}=2\pi V$$

则有

$$\int_{M}KdA=2\pi F-2\pi E+2\pi V=2\pi\chi(M)$$

习　题

1　设曲面的第一基本形式是

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2$$

具体计算相对分量 ω_1^2，并求高斯曲率 K. 特别地，如果

$$ds^2=4\frac{du^2+dv^2}{[1-(u^2+v^2)]^2}\quad 或\quad ds^2=\frac{du^2+dv^2}{v^2}$$

求证

$$K=-1$$

2　设曲面的第一基本形式是

$$ds^2=[U(u)+V(v)](du^2+dv^2)$$

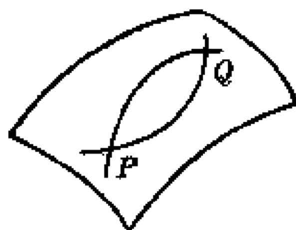
计算相对分量 $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$ 和高斯曲率 K.

3　设曲面的第一基本形式是

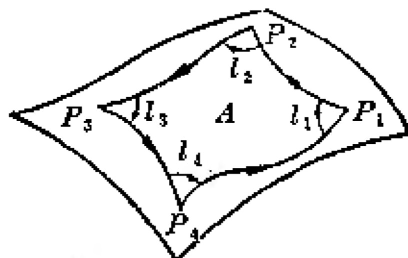
$$ds^2=\frac{du^2-4vdudv+4udv^2}{4(u-v^2)}\qquad (u>v^2)$$

计算相对分量 $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$ 和高斯曲率 K.

4　在曲面域中，设其高斯曲率为负或零，试用高斯-波涅公式证明不能有两条测地线交于两点 P, Q(如图).



(第 4 题)



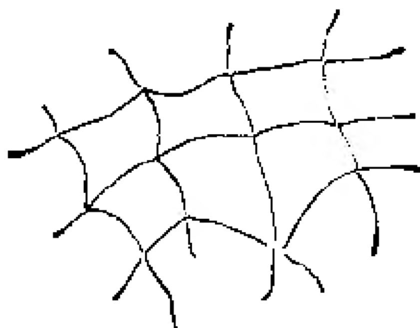
(第 5 题)

5　曲面域 A 为四边形，在顶点 P_1, P_2, P_3, P_4 的内角设为 l_1, l_2, l_3, l_4，试证

$$\int_A K\omega^1\wedge\omega^2+\int_{\partial A} k_g ds = l_1+l_2+l_3+l_4-2\pi$$

6　设定向了的闭曲面 S 被剖分成几个四边形，而且各顶点正好集聚四个四边形(如图)，试证这时有

$$\int_S K\omega^1\wedge\omega^2=0$$



(第 6 题)

7　对于定向了的闭曲面 S 上定义的一次微分形式 φ，试证

$$\int_S d\varphi=0$$